

MATeMATyka

Joanna Czarnowska
Jolanta Wesołowska
Barbara Wolnik
Wojciech Babiański

Zakres podstawowy i rozszerzony

Zbiór zadań
dla szkół ponadgimnazjalnych

Zbiór zadań *MATeMATyka 2* uzupełnia dostosowany do obowiązującej podstawy podręcznik *MATeMATyka 2* Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej i Grzegorza Janochy dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki na IV etapie edukacyjnym.

Nr ewidencyjny w wykazie: 360/2/2013

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek. Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2013

ISBN 978-83-267-1508-2

Warszawa 2013

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Urszula Cielniak, Anna Nałęcz,
Robert Pysiak, Magdalena Spalińska, Beata Zając, Elżbieta Zięcina
Konsultacje merytoryczne: Anna Gawron, Małgorzata Jarosławska,
Ewa Muszyńska, Piotr Pawlikowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Renata Wolniewicz

Korekta językowa: Zofia Psota

Projekt graficzny okładki: Elżbieta Król

Fotografia na okładce: shutterstock.com/file404

Projekt graficzny zbioru zadań: Lech Chańko

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Fotoedycja: Ewa Szymańska

Fotografie: Thinkstock/Getty Images - iStockphoto s.86, Panthermedia/Melissa Schalk s.203

Skład systemem TEX: FIXPOINT Krzysztof Rudnik

Nowa Era Sp. z o.o.

Al. Jerozolimskie 146D, 02-305 Warszawa

tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81

infolinia: 801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)

58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: DRUK-INTRO S.A., Inowrocław

Spis treści

1. Wielomiany	7
1.1. Stępień i współczynniki wielomianu	7
1.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	9
1.3. Mnożenie wielomianów	11
1.4. Rozkład wielomianu na czynniki (1)	13
* 1.5. Rozkład wielomianu na czynniki (2)	15
1.6. Równania wielomianowe	17
* 1.7. Dzielenie wielomianów	20
* 1.8. Równość wielomianów	22
* 1.9. Twierdzenie Bézouta	24
* 1.10. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu	27
* 1.11. Pierwiastki wielokrotne	30
* 1.12. Wykres wielomianu	32
* 1.13. Nierówności wielomianowe	36
* 1.14. Wielomiany – zastosowania	38
Zestawy powtórzeniowe	41
2. Funkcje wymierne	47
2.1. Proporcjonalność odwrotna	47
2.2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	50
2.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor	52
* 2.4. Funkcja homograficzna	55
* 2.5. Przekształcenia wykresu funkcji	57
2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	60
2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	63
2.8. Równania wymierne	64
* 2.9. Nierówności wymierne	66
* 2.10. Funkcje wymierne	68
* 2.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną	71
2.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	73
2.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	75
Zestawy powtórzeniowe	77

* 3. Funkcje trygonometryczne	82
* 3.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	82
* 3.2. Kąt obrotu	85
* 3.3. Miara łukowa kąta	87
* 3.4. Funkcje okresowe	89
* 3.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus	91
* 3.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens	94
* 3.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor	96
* 3.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)	99
* 3.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)	101
* 3.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)	104
* 3.11. Tożsamości trygonometryczne	106
* 3.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów	109
* 3.13. Wzory redukcyjne	111
* 3.14. Równania trygonometryczne (1)	113
* 3.15. Równania trygonometryczne (2)	115
* 3.16. Nierówności trygonometryczne	117
Zestawy powtórzeniowe	120
4. Ciągi	127
4.1. Pojęcie ciągu	127
4.2. Sposoby określania ciągu	128
4.3. Ciągi monotoniczne (1)	130
* 4.4. Ciągi określone rekurencyjnie	133
* 4.5. Ciągi monotoniczne (2)	136
4.6. Ciąg arytmetyczny (1)	138
4.7. Ciąg arytmetyczny (2)	141
4.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	143
4.9. Ciąg geometryczny (1)	146
4.10. Ciąg geometryczny (2)	148
4.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	151
* 4.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania	153
4.13. Procent składany	156
* 4.14. Granica ciągu	160
* 4.15. Granica niewłaściwa	162
* 4.16. Obliczanie granic ciągów (1)	163
* 4.17. Obliczanie granic ciągów (2)	165
* 4.18. Szereg geometryczny	168
Zestawy powtórzeniowe	171

* 5. Rachunek różniczkowy	179
* 5.1. Granica funkcji w punkcie	179
* 5.2. Obliczanie granic	181
* 5.3. Granice jednostronne	183
* 5.4. Granice niewłaściwe	185
* 5.5. Granica funkcji w nieskończoności	187
* 5.6. Ciągłość funkcji	189
* 5.7. Własności funkcji ciągłych	192
* 5.8. Pochodna funkcji	195
* 5.9. Funkcja pochodna	197
* 5.10. Działania na pochodnych	199
* 5.11. Interpretacja fizyczna pochodnej	201
* 5.12. Funkcje rosnące i malejące	204
* 5.13. Ekstrema funkcji	206
* 5.14. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji	208
* 5.15. Zagadnienia optymalizacyjne	211
* 5.16. Szkicowanie wykresu funkcji	213
Zestawy powtórzeniowe	215
6. Planimetria	219
6.1. Długość okręgu i pole koła	219
6.2. Kąty w okręgu	221
6.3. Okrąg opisany na trójkącie	225
6.4. Okrąg wpisany w trójkąt	227
6.5. Czworokąty wypukłe	229
* 6.6. Okrąg opisany na czworokącie	232
* 6.7. Okrąg wpisany w czworokąt	235
* 6.8. Twierdzenie sinusów	237
* 6.9. Twierdzenie cosinusów	240
Zestawy powtórzeniowe	243

Odpowiedzi do zadań	249
----------------------------	------------

1. Wielomiany

1.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Zestaw I

- Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.
 - $w(x) = x^2 - 1 + x^3 - x^4 - x^5$
 - $w(x) = 2x - 3x^5 + 7x^6 - 3x^2 - 2$
 - $w(x) = \frac{1}{2}x^6 - x^2 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{1}{4}x^5 + 7$
 - $w(x) = \sqrt{2}x^3 - x + (1 - \sqrt{2})x^9$
- Podaj stopień wielomianu w , jego wyraz wolny oraz współczynnik przy najwyższej potęgze zmiennej x .
 - $w(x) = -3x^5 + x^2 - 6x$
 - $w(x) = 0,8x^4 + 3x - 1 + \sqrt{3}$
- Zapisz wielomian w piątego stopnia, w którym:
 - $a_4 = a_2 = a_1 = 0, a_3 = a_0 = 6, a_5 = \frac{1}{2}a_3,$
 - $a_5 = 8, a_n = a_{n+1} - 4$ dla $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -1, x = 0$ i $x = 1$.
 - $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$
 - $w(x) = -8x^3 + 2x^2 - 4x - 3$
 - $w(x) = -2x^4 + 6x^2 - 7$
 - $w(x) = 0,125x^4 - x^3 + 2,5x + 1,25$
- Które z punktów: A, B i C należą do wykresu wielomianu w ?
 - $w(x) = -3x^3 - 8x^2 + 3x + 5, A(\frac{1}{3}, 5), B(-2, -1), C(0, -5)$
 - $w(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - x - \frac{7}{2}, A(2, 10), B(\frac{1}{2}, -3\frac{5}{16}), C(-1, -7)$
- Punkty: $A(\frac{1}{2}, a), B(-1, b), C(\frac{\sqrt{6}}{2}, c)$ należą do wykresu wielomianu w . Wyznacz współrzędne: a, b i c .
 - $w(x) = 4x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 6x + 3$
 - $w(x) = -\frac{4}{3}x^4 + x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- Oblicz współczynnik a wielomianu w , jeśli:
 - $w(x) = x^2 - ax + 2, w(2) = 4,$
 - $w(x) = x^3 - 2x^2 + a, w(0) = -2,$
 - $w(x) = ax^3 - 5x^2 + x, w(1) - w(-1) = \frac{3}{2}.$

8. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w , jeśli:

- a) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + ax + b$, $w(0) = 5$, $w(1) = -3$,
- b) $w(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2$, $w(-3) = 11$, $w(2) = \frac{8}{3}$,
- c) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 10$, $w(2) = -w(1)$, $w(-2) = 16$.

Test jednokrotnego wyboru

9. Dany jest wielomian $w(x) = \sqrt{2}x^4 + ax^2 + 1 - \sqrt{2}$. Jeśli spełniony jest warunek $w(\sqrt{2}) - 4w(1) = 3\sqrt{2}$, to:

- A. $a = -\frac{3}{2}$, C. $a = -\frac{1}{2}$,
- B. $a = -\sqrt{2}$, D. $a = \sqrt{2}$.

10. Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x + b$ spełnia warunki $w(1) = -w(-1)$ oraz $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$. Wynika stąd, że:

- A. $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, C. $a = \sqrt{2}$, $b = 4$,
- B. $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, D. $a = 6$, $b = -4$.

11. Do wykresu wielomianu $w(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - 3\sqrt{2} + 6$ należy punkt:

- A. $P(-3, 6)$, C. $R(3, 6\sqrt{2})$,
- B. $Q(3, -6)$, D. $S(-3, -6\sqrt{2})$.

Zestaw II

12. Wyznacz stopień wielomianu w w zależności od wartości parametru a .

- a) $w(x) = (a^2 - 1)x^3 - (a + 1)x + 1$
- b) $w(x) = 2a(a + 3)x^4 + ax^2 - 3$
- c) $w(x) = (a^2 - 4a)x^6 + \frac{a}{2}x^3 + 1 - a$
- d) $w(x) = (a^2 + a - 2)x^5 + (a - 1)x^4 + (a + 5)x^2 + 4$

13. Podaj wzór wielomianu w trzeciego stopnia, którego współczynniki, począwszy od wyrazu wolnego, są:

- a) kolejnymi liczbami parzystymi, przy czym suma wszystkich współczynników jest równa 36,
- b) kolejnymi liczbami nieparzystymi podzielnymi przez 3, przy czym suma wszystkich współczynników jest liczbą dwucyfrową większą od 70.

14. Dany jest wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

- a) Wyznacz $w(1)$ i $w(-1)$.
- b) Oblicz sumę współczynników wielomianu w przy parzystych potęgach zmiennej x , wiedząc, że jego stopień jest parzysty oraz $w(1) = -8$ i $w(-1) = 2$.

15. Oblicz sumę współczynników wielomianu w .

- a) $w(x) = (x^2 + 3x - 5)^3(2x - 6) - x^2 + 3x$
- b) $w(x) = (5x^5 - 3x^3 - 4x + 1)^{101}$

1.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Zestaw I

1. Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g .

- a) $f(x) = 2x^5 - x^2 + 3x^3 + 2$, $g(x) = x^3 - 2x^5 + x^2 - 6$
- b) $f(x) = -3x^3 + 2x^5 - x^6 + 7x^2 + x$, $g(x) = 4x^5 - x^2 + x^6 - 3x^3$
- c) $f(x) = 0,75x^6 + 2x^4 - 0,125x^2 + 2,5$, $g(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^6 + 3x^4 - \frac{3}{2}$

2. Wyznacz wielomiany $u(x) = 3f(x) + 4g(x)$ i $w(x) = 1,5g(x) - 0,5f(x) + 1$.

- a) $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$, $g(x) = -2x^4 - 4x^3 + 6$
- b) $f(x) = -6x^5 + 4x^4 - 2x^2$, $g(x) = 5x^5 - 4x^4 + 6x - 3$

3. Dane są wielomiany: $f(x) = 6x^3 - 5x^2 - 4$, $g(x) = -2x^2 - x + 3$ oraz $h(x) = 7x^2 - 2x - 3x^3$. Wyznacz wielomian w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = f(x) + g(x) + h(x)$
- b) $w(x) = -\frac{1}{2}f(x) + 2g(x) - h(x)$

4. Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1 - x^5$ i $g(x) = 5 - 2x^3 + 4x^2 + 5x^5$. Wyznacz wielomian h , jeśli:

- a) $f(x) + h(x) = g(x)$, c) $2h(x) + 3g(x) = f(x)$,
- b) $h(x) - 5f(x) = 3g(x)$, d) $3h(x) - g(x) = 5f(x)$.

5. Wyznacz stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametru a .

- a) $u(x) = x^4 - 5x^2 + 1$, $w(x) = ax^3 - x - 1$
- b) $u(x) = ax^3 - x^2 + 6$, $w(x) = x^3 - 5x - 4$
- c) $u(x) = (a^2 - 1)x^6 + ax^4 - 3ax$, $w(x) = x^4 - 3x + a - 2$

6. Wyznacz stopień wielomianu $u - w$ w zależności od parametrów a i b .

- a) $u(x) = ax^4 + x^2 - 1$, $w(x) = bx^3 - 3x - 2$
 b) $u(x) = ax^5 + x^4 + 3x$, $w(x) = 2bx^4 + 2x - x^5 - 5$
 c) $u(x) = 2ax^4 + x^2 + 3$, $w(x) = -2bx^4 - ax^3 - 7x^2$

Test jednokrotnego wyboru

7. Dane są wielomiany $f(x) = -\sqrt{2}x^7 - 4x^5 + 5x^2 + 2(1 - 3\sqrt{2})x$ oraz $g(x) = 6\sqrt{2}x - 5x^2 + 3x^5 + (\sqrt{2} - 1)x^7$. Jeśli $w = f + g$, to dla $x = -1$ wielomian w przyjmuje wartość:

- A. -9, B. -1, C. 0, D. 9.

8. Niech $u(x) = (a^2 - 2)x^5 - 2ax^3 + 8$, $w(x) = (a^4 - 4)x^5 - 3ax^3 + 5$. Suma wielomianów u i w jest wielomianem trzeciego stopnia dla dwóch różnych wartości parametru a , których iloczyn wynosi:

- A. -4, B. -2, C. 2, D. 4.

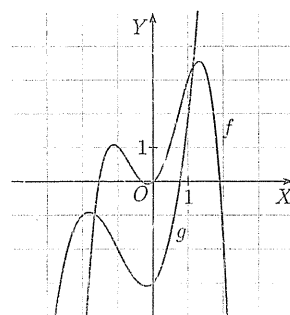
9. Nie istnieją takie wartości parametrów a i b , dla których suma wielomianów $u(x) = (a^2 - 9)x^6 + (b - 1)x^4 + x^2$ oraz $w(x) = (b^2 - 1)x^5 + (a + 3)x^3 + x$ byłaby wielomianem stopnia:

- A. 4, B. 3, C. 2, D. 1.

Zestaw II

10. Na rysunku obok przedstawione są wykresy wielomianów $f(x) = -x^4 + 3x^2 + x$ oraz $g(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$.

- a) Niech $u(x) = 2f(x) + 3g(x)$. Który z punktów $P(-1, -4)$ i $Q(0, -5)$ należy do wykresu wielomianu u ?
 b) Niech $w(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Dla jakich wartości a i b punkty $A(0, a)$ i $B(1, b)$ należą do wykresu wielomianu w ?



11. Punkt $A(1, -5)$ należy do wykresu wielomianu $f(x) = ax^3 + bx^2 - 5x + 1$, a punkt $B(1, 0)$ - do wykresu wielomianu $g(x) = bx^4 - x^3 + 2x^2 + cx + 2$. Oblicz współczynniki: a , b i c , wiedząc, że punkt $C(-1, -4)$ należy do wykresu wielomianu $w(x) = 2f(x) - 5g(x)$.

12. Dane są wielomiany: $f(x) = bx^2 + ax - 1$, $g(x) = -ax^3 + x^2 + \frac{b}{2}x - \frac{1}{2}$ oraz $h(x) = 2x - a$. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $w(x) = \frac{1}{2}(h(x) + f(x)) - g(x)$ jest wielomianem zerowym?

13. Niech $f(x) = (a^2 - 1)x^6 + (1 - 5a)x^5 - 4a$, $g(x) = -3ax^6 - ax^4 + 1$. Dla jakich wartości parametru a stopień wielomianu $h(x) = 2f(x) - g(x)$ wynosi 5, a jego wyraz wolny jest liczbą dodatnią?

14. Niech $f(x) = (a + 1)x^6 - x^5 + x^4 + 2$, $g(x) = (a - 3)x^6 + ax^5 + 2x^4 - 1$. Dla jakich wartości parametru a stopień wielomianu $h(x) = af(x) + g(x)$ wynosi 4, a suma jego współczynników jest liczbą ujemną?

1.3. Mnożenie wielomianów

Zestaw I

1. Wyznacz iloczyn. Podaj stopień wielomianu w i współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x .

- a) $w(x) = 3x^2(2x^3 + x^2 - 5x + 7)$
 b) $w(x) = (x - 3)(3x^3 + 4x^2 - 2)$
 c) $w(x) = (2 - x^2)(x^4 + 2x^2 - 6)$
 d) $w(x) = (x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1)(3x^2 - 6)$
 e) $w(x) = (2x^3 - x + 1)(2x^3 + x + 1)$
 f) $w(x) = (2\sqrt{2}x^3 - x^2 - 1)(4x^3 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2})$

2. Dane są wielomiany: $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ oraz $h(x) = 3 - x^3$. Wyznacz wielomian w i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = f(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot h(x)$
 b) $w(x) = [h(x)]^2 - f(x)$
 c) $w(x) = [f(x) - g(x)]^2 - h(x)$

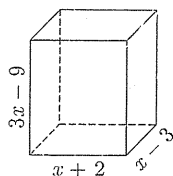
3. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = 2w(x) - [u(x)]^2$.

- a) $u(x) = x^2 - 5x$, $w(x) = x^3 + x^2 + 2$
 b) $u(x) = 2x^3 - x^2 + 2$, $w(x) = -5x^4 + x^2 - 3$
 c) $u(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 1$, $w(x) = 4x^2 - x + 2$

4. Nie wykonując mnożenia, podaj stopień wielomianu w , jego wyraz wolny i współczynnik przy najwyższej potęgze zmiennej x .
- a) $w(x) = (x-2)(x-5+x^2)$ d) $w(x) = (x-5)(x+1)(2-x)$
b) $w(x) = (3-x^2)(1-x+2x^2)$ e) $w(x) = (4x^2-1)(x+3)(1-x^2)$
c) $w(x) = (5x^3-1)(3-x-x^3)$ f) $w(x) = (x^3+x)(2-x^2)(2x-4)$
5. Co można powiedzieć o stopniu wielomianu w , jeżeli $\text{st}(f) = 2$, $\text{st}(g) = 4$, a $\text{st}(h) = 2$?
- a) $w(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$
b) $w(x) = f(x) \cdot g(x) + h(x)$
c) $w(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x)$

Test jednokrotnego wyboru

6. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: $x-4$, $x+4$, x^2-4 , gdzie $x > 4$. Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wielomianem:
- A. $V(x) = x^4 - 16$, C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$,
B. $V(x) = x^4 - 64$, D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$.
7. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok, gdzie $x > 3$, jest opisane wielomianem:
- A. $P(x) = 14x^2 - 44x + 6$,
B. $P(x) = 14x^2 - 40x + 4$,
C. $P(x) = 14x^2 - 40x + 8$,
D. $P(x) = 14x^2 - 36x + 8$.



10. Dane są wielomiany: $f(x) = ax^3 + 1$, $g(x) = 2x^4 + a$ oraz $h(x) = 5x^3 - a$. Dla jakich wartości parametru a spełniony jest warunek $w(-1) = -8$?

- a) $w(x) = f(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot h(x)$
b) $w(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) - a^3 - 1$

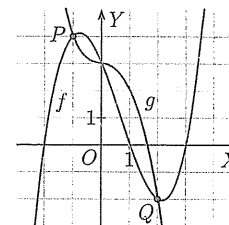
11. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomiany u i w mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x ?

- a) $u(x) = (x^2 + 5x - 1)(x^2 - x)$, $w(x) = mx^4 + nx^3 - 6x^2 + x$
b) $u(x) = (1 + x - x^3)(5x^3 + x + 5)$, $w(x) = 6x + 5 - x^2(mx^4 + nx^2 - 1)$
c) $u(x) = (x^4 - m + 1)(2x^3 - x)$, $w(x) = (mx^2 - n)(x^5 - x)$

12. Punkt $A(1, 2)$ należy do wykresu wielomianu $f(x) = x^3 + 2x^2 + a$, punkt $B(2, 2)$ należy do wykresu wielomianu $g(x) = bx^3 - 4x^2 + cx - 2a$, a punkt $C(3, 440)$ należy do wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{2}f(x) \cdot g(x)$.

- a) Oblicz współczynniki: a , b i c .
b) Wyznacz wielomian w .

13. Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów f i g zmiennej x . Każdy z tych wielomianów jest postaci $(x^2 + ax + 3)(bx + 1)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Odczytaj współrzędne punktów P i Q i wyznacz wzory wielomianów f i g .



1.4. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Zestaw I

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.
a) $w(x) = 9x^3 - x$ b) $w(x) = 50x^4 - 8x^2$ c) $w(x) = 12x^3 - 27x^5$
2. Rozłóż wielomian w na czynniki.
a) $w(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2$ g) $w(x) = (x^2 + x + 4)(x^2 + 6x - 7)$
b) $w(x) = 9x^4 + 6x^3 + x^2$ h) $w(x) = (3x^2 + 5x - 2)(3x^2 + 2x - 1)$
c) $w(x) = 2x^5 + 4x^4 - 6x^3$ i) $w(x) = (0,36x^4 - 0,16x^2)(7x^3 + x^2 + x)$
d) $w(x) = x^5 - 3,5x^4 - 2x^3$ j) $w(x) = (x^2 + 1)^2 - (x - 3)^2$
e) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ k) $w(x) = (2x^2 - x)^2 - (x - 4x^3)^2$
f) $w(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3$ l) $w(x) = 25x^4 - (10 - 3x^2)^2$

Zestaw II

8. Wyznacz wielomian $w(x) = f(x) \cdot g(x) + h(x)$. Dla jakich wartości parametru a jest to wielomian stopnia n ?
- a) $f(x) = ax + 3$, $g(x) = x^2 + ax - 1$, $h(x) = x^3 - 3x^2$, $n = 3$
b) $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 1$, $g(x) = ax^2 - 3$, $h(x) = 3x^3 - 2x^5$, $n = 4$
c) $f(x) = a^2x^2 + x - 1$, $g(x) = -x^2 + ax + 2$, $h(x) = a^2x^4 - 2x$, $n = 2$
9. Dane są wielomiany $f(x) = (a-1)x^3 + x - a$ oraz $g(x) = -2ax^2 - 1$. Dla jakich wartości parametru a stopień wielomianu $h(x) = f(x) \cdot g(x) - x^3 + x^2$ jest liczbą parzystą?

3. Wylóż wskazany czynnik przed nawias. Sprawdź, czy otrzymany w nawiasie trójmian kwadratowy można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

- a) $w(x) = (3x - 1)(x + 1) - (1 - 3x)x^2 + x(3x - 1)$, $3x - 1$
 b) $w(x) = (-5 + 2x)(x + 4) - (5 - 2x)^2 - 3(5 - 2x)x^2$, $2x - 5$
 c) $w(x) = (4x - 1)(x - 5) - (x^2 + 5)(1 - 4x) - (12x^2 - 3x)$, $4x - 1$
 d) $w(x) = (6 - 4x)(3x - 1) + (3 - 2x)^3 + 2(3x - 4)(3 - 2x)$, $3 - 2x$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x + 2)^3$ d) $(2x + 1)^3$
 b) $(x + 3)^3$ e) $(1 + \sqrt{2}x)^3$
 c) $(x - 1)^3$ f) $(1 - 3x)^3$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

5. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ d) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
 b) $(3 + x)(x^2 - 3x + 9)$ e) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
 c) $(1 - x)(x^2 + x + 1)$ f) $(x^4 + 3x^2 + 9)(3 - x^2)$

6. Korzystając z podanego wzoru, zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

- a) $x^6 - 1$
 b) $32x^5 - 1$
 c) $0,125x^3 - 1$

$$(a-1)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}) = a^n - 1$$

7. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x + 1)(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$
 b) $(\sqrt{5}x + 1)(\sqrt{5}x - 1)(25x^4 + 5x^2 + 1)$
 c) $(\sqrt{3} - 3x^2)(9x^8 + 3x^4 + 1)(\sqrt{3}x^2 + 1)$
 d) $(x - 1)^2(1 + x + x^2 + x^3)(x + 1)(x^2 + 1)$

Test jednokrotnego wyboru

8. Wielomian $w(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - 3\right)^2$ zapisano w postaci $w(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Iloczyn $a_2 \cdot a_1 \cdot a_0$ jest równy:

- A. $6\sqrt{3}$, C. $-3\sqrt{3}$,
 B. 3, D. $-6\sqrt{3}$.

9. Wielomian $w(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) - (1 - x)(x + 1)^2 - (x^3 - x)(3x + 2)$ zapisano w postaci $w(x) = (x^2 - 1) \cdot p(x)$. Wskaż wielomian p .

- A. $p(x) = -3x^2 + 2x - 3$ C. $p(x) = -3x^2 - x + 3$
 B. $p(x) = -3x^2 - 4x + 6$ D. $p(x) = -3x^2 + x + 4$

10. Wyrażenie $(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$ jest równe:

- A. $16x^4 + 4x^3 + 1$, C. $16x^4 + 4x^2 + 1$,
 B. $16x^4 - 4x^3 + 1$, D. $16x^4 - 4x^2 + 1$.

Zestaw II

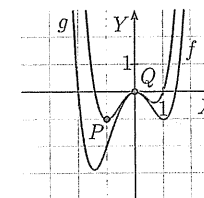
11. Rozłóż wielomian $w(x) = f(x) \cdot g(x)$ na czynniki.

- a) $f(x) = x^7 - x^3$, $g(x) = x^3 - x$ b) $f(x) = 64x^6 - 1$, $g(x) = 27x^3 + 1$

12. Stopień wielomianu $w(x) = (a + 1)x^5 + (a + b)x^4 + (b + 2a)x^3 - 10x^2 + b - 3$ jest równy 4. Wyznacz parametry a i b oraz rozłóż wielomian w na czynniki, jeśli $w(-1) - w(1) = -2$.

13. Na rysunku przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = (x^2 - a)^2 - b$ i $g(x) = f(x) + x^3$.

- a) Wyznacz parametry a i b , jeżeli punkty P i Q należą do wykresu wielomianu f .
 b) Rozłóż wielomiany f i g na czynniki.



*1.5. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Zestaw I

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 25x^4 - 1$ c) $w(x) = x^6 - 1$
 b) $w(x) = 25x^3 + \sqrt{5}$ d) $w(x) = 27x^6 - 1$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^6 + 2x^4 + x^2$ c) $w(x) = 5x^7 - 2x^5 + 0,2x^3$
 b) $w(x) = 2x^5 + 4x^3 - 6x$ d) $w(x) = x^6 + 3,75x^4 - x^2$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 5\sqrt{5}x^5 + x^2$ c) $w(x) = x^6 + 7x^3 - 8$
b) $w(x) = x^6 - 0,125x^3$ d) $w(x) = 4x^6 - 7\sqrt{2}x^3 - 4$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $w(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ e) $w(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x - 6$
b) $w(x) = x^5 + x^4 - x - 1$ f) $w(x) = 27x^3 - 9x^2 - 3x + 1$
c) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ g) $w(x) = 4x^6 - 9x^4 - 16x^2 + 36$
d) $w(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ h) $w(x) = 4\sqrt{2}x^4 - 10\sqrt{2}x^3 + 2x - 5$

5. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $w(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ e) $w(x) = 3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$
b) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ f) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 6x - 4$
c) $w(x) = 27x^3 - 6x^2 - 2x + 1$ g) $w(x) = 4x^4 + 2x^3 + x - 1$
d) $w(x) = 5x^3 - 19x^2 - 38x + 40$ h) $w(x) = 5x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 20x$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki liniowe i oblicz jego wartość dla podanego argumentu x .

- a) $w(x) = (2x - 3)(5x - 2) + (3 - 2x)(x + 2)$, $x = \frac{7}{2}$
b) $w(x) = x^2 - 5x - (x - 5)(3x + 1)$, $x = 6$
c) $w(x) = (2x^2 + x + 2)^2 - (2x^2 - x - 4)^2$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $w(x) = (x^2 - 4)^2 - (x - 2)^2$, $x = \sqrt{2} - 1$
e) $w(x) = (9x^2 - 1)^2 - (3x + 1)^2$, $x = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$

Test jednokrotnego wyboru

7. Które z podanych wyrażeń nie jest poprawnym rozkładem wielomianu $w(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ na czynniki?

- A. $w(x) = \frac{3}{2}(8x - 6)\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}\right)$ C. $w(x) = 3(4x - 3)\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}\right)$
B. $w(x) = \frac{1}{4}(8x - 6)(2x^2 + 2)$ D. $w(x) = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)$

8. Wielomian $w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 8x + 24$ rozłożono na czynniki i otrzymano $w(x) = (x + 2) \cdot p(x)$. Wyrażenie $p(x)$ jest trójmianem kwadratowym, którego wyróżnik wynosi:

- A. -140, B. -44, C. 44, D. 112.

9. Niech $w(x) = 9\sqrt{3}x^4 + 12\sqrt{3}x^3 + 3x + 4$. Ile czynników liniowych występuje w rozkładzie wielomianu w ?

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Zestaw II

10. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 5x^5 - x^3 - 15\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}$
b) $w(x) = x^4 - x^3 + x - 1$
c) $w(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$
d) $w(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2x - 2$
e) $w(x) = 2x^5 + 6x^4 - 4x^3 - 12x^2$
f) $w(x) = x^9 - x^7 - x^3 + x$

11. Uzasadnij, że dla każdego argumentu całkowitego wartość wielomianu $w(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ jest podzielna przez 120.

12. Uzasadnij, że dla każdego argumentu całkowitego wartość wielomianu:

- a) $w(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$ jest liczbą nieparzystą,
b) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ jest liczbą parzystą.

13. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozłóż wielomian w na czynniki.

Przykład

$$\begin{aligned} w(x) &= x^4 + 3x^2 + 4 = \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 + 3x^2 = \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 = \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

- a) $w(x) = x^4 + 2x^2 + 4$
b) $w(x) = x^4 - 3x^2 + 9$
c) $w(x) = 4x^5 + x^3 + x$

1.6. Równania wielomianowe

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ c) $x^5 - 6x^4 = 7x^3$ e) $x^4 + 2x^2 = 4x^3$
b) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 = 0$ d) $8x^6 + 15x^5 = 2x^4$ f) $x^5 + x^3 = 2\sqrt{5}x^4$

2. Rozwiąż równanie.

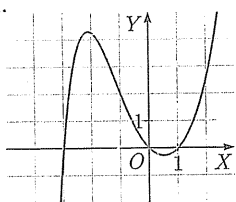
a) $3x^4 - 9x^2 = 0$ b) $64x^5 = -x^2$ c) $\frac{1}{4}x^6 = 9x^2$

3. Rozwiąż równanie.

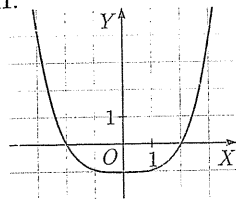
a) $x^5 - 6x^3 + 9x = 0$ b) $x^6 - 7x^2 = 6x^4$

4. Na rysunkach przedstawiono wykresy wielomianów: $u(x) = \frac{1}{16}x^4 - 1$, $v(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ oraz $w(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{1}{27}x^4 + x^2 - x$. Wyznacz ich miejsca zerowe, a następnie dopasuj do każdego wielomianu jego wykres.

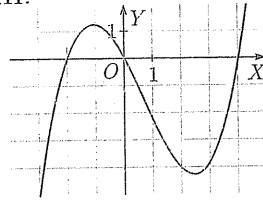
I.



II.



III.



5. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 5x^2 = 10 - 2x$ e) $x^4 - 6\sqrt{3} = 2x^3 - 3\sqrt{3}x$
 b) $5x^3 + 2 = x^2 + 10x$ f) $2x^5 + \frac{1}{4}x^2 = 6x^3 + \frac{3}{4}$
 c) $x^4 - x^3 = 8x - 8$ g) $0,04x^2 - x^3 = 0,008 - 5x^5$
 d) $27x^4 - x = 9x^3 - \frac{1}{3}$ h) $x^6 - 12 = 4x^4 - 3x^2$

6. Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0$
 b) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$
 c) $2x^5 + 6x^4 + x - 3x^3 - 9x^2 + 3 = 0$
 d) $8x^5 - 10x^3 + 5x^2 - 1 - 4x^4 + 2x = 0$

7. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = m^3x^3 + x^2 - 4x$, do którego należy punkt $P(-3, -6)$, oraz:

a) osi OX , b) prostej $y = 4$.

Test jednokrotnego wyboru

8. Ile rozwiązań ma równanie $x^7 - x^3 = x^4 - 1$?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

9. Iloczyn niezerowych pierwiastków równania $8x^7 + \frac{1}{2}x^3 = 4x^5$ jest równy:

A. $-\frac{1}{2}$, B. $-\frac{1}{4}$, C. 2, D. 4.

10. Odległość między punktami wspólnymi prostej $y = 4x$ i wykresu wielomianu $w(x) = x^3 - 2x^2 + 8$ wynosi:

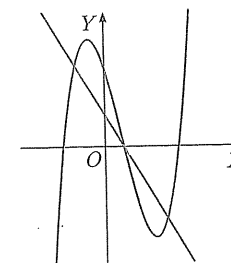
A. $4\sqrt{10}$, B. $4\sqrt{11}$, C. $4\sqrt{13}$, D. $4\sqrt{17}$.

11. Ile punktów wspólnych mają wykresy wielomianów $w(x) = x^n + x - 6$ i $v(x) = x^{n+2} + x - 6$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 6

Zestaw II

12. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 6$ i prostą o równaniu $y = -3x + 2$. Wyznacz punkty, w których prosta przecina wykres wielomianu.



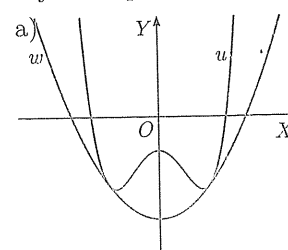
13. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l .

a) $w(x) = 8x^4 + 2x + 3$, $l: y = 2x + 5$
 b) $w(x) = x^5 - 6x^3 + 2$, $l: y = -5x + 2$
 c) $w(x) = 3x^3 - 12x^2 + 2x + 0,5$, $l: y = 3x - 3,5$
 d) $w(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2,5x + 3$, $l: y = -1,5x + 3$

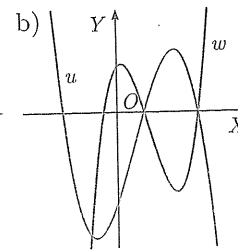
14. Pierwiastki równania $2x^2 - 5x + 2 = 0$ są również pierwiastkami równania $4x^5 + ax^3 - 32x^2 + b = 0$. Znajdź współczynniki a i b . Wyznacz pierwiastki drugiego równania.

15. Liczby -2 i 1 są pierwiastkami równania $2x^3 + mx^2 - 3x + n = 0$. Wyznacz współczynniki m i n oraz oblicz trzeci pierwiastek tego równania.

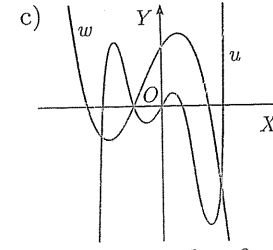
16. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w .



$u(x) = x^4 - 3x^2 - 2$
 $w(x) = x^2 - 6$



$u(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$
 $w(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$



$u(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 + 4x$
 $w(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$

17. Wyznacz liczbę a , wiedząc, że jest ona pierwiastkiem wielomianu w .

a) $w(x) = x^3 + (2a - 3)x^2 + (a - 1)x + 4a - 2$

b) $w(x) = x^4 + 2a^2x^2 - 4ax + 1$

*1.7. Dzielenie wielomianów

Zestaw I

1. Podziel wielomian w przez dwumian q . Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6$, $q(x) = x - 2$

c) $w(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x + 3$

d) $w(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x - 4$, $q(x) = x + 4$

e) $w(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 9x + 9$, $q(x) = x - 3$

2. Podziel wielomian w przez dwumian q z resztą r . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 5$, $q(x) = x - 5$

b) $w(x) = -x^3 + 2x - 4$, $q(x) = x + 2$

c) $w(x) = 2x^3 - 8x^2 + 3x$, $q(x) = x - 4$

d) $w(x) = 5x^4 + x$, $q(x) = x + 1$

e) $w(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 5$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

3. Podziel wielomian w przez dwumian q z resztą r . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$, $q(x) = 2x - 1$

b) $w(x) = 16x^4 - x^2 + 2x$, $q(x) = 4x + 3$

c) $w(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$, $q(x) = 3x - 2$

d) $w(x) = x^4 - 4x^2 + 3x + 5$, $q(x) = \frac{1}{2}x + 1$

4. Podziel wielomian w przez dwumian $q(x) = x - a$ z resztą r . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x)$, a następnie oblicz jego wartość dla argumentu a .

a) $w(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = -5x^3 - 4x^2 + 10x - 4$, $q(x) = x + 2$

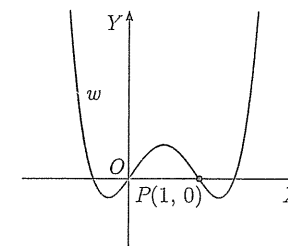
c) $w(x) = 4x^3 + 2x^2 - x - 5$, $q(x) = x - 0,5$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = 4x^4 + ax^3 + x^2 + 3x$. Punkt P należy do tego wykresu.

a) Wyznacz współczynnik a .

b) Wykaż, że wielomian w jest podzielny przez dwumiany $2x + 1$ i $2x - 3$.

c) Wykaż, że wielomian $u(x) = w(x) - 1$ jest podzielny przez dwumian $2x - 1$.



Test jednokrotnego wyboru

6. Po podzieleniu wielomianu $w(x) = 2x^3 - 15x^2 + 22x - 24$ przez dwumian $x - 6$ otrzymujemy iloraz równy:

A. $2x^2 - 4x + 4$,

C. $2x^2 - 2x + 4$,

B. $2x^2 - 3x + 4$,

D. $2x^2 - x + 4$.

7. Wielomian $p(x) = 3x^2 - 2x - 6$ otrzymujemy w wyniku podzielenia wielomianu w przez dwumian $q(x) = x + 3$, jeśli:

A. $w(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$,

C. $w(x) = 3x^3 + 7x^2 - 12x - 18$,

B. $w(x) = 3x^3 - x^2 + 8x - 18$,

D. $w(x) = 3x^3 - x^2 + 12x - 18$.

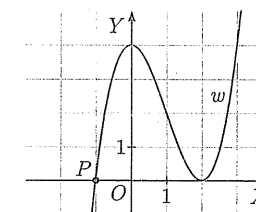
8. Punkt $P(-1, 0)$ należy do wykresu wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + 4$ (rysunek obok). Reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 1$ jest równa:

A. -1 ,

B. 1 ,

C. 2 ,

D. 4 .



Zestaw II

9. Podziel wielomian w przez wielomian q z resztą r . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^2 + 1$

b) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^2 - x + 1$

c) $w(x) = 4x^3 - 6x$, $q(x) = 2x^2 - x$

d) $w(x) = 6x^4 - x^2 + 5x - 3$, $q(x) = 3x^2 + 1$

e) $w(x) = 4x^4 - 2x^3 - x$, $q(x) = 2x^2 + x - 2$

10. Wyznacz resztę r z dzielenia wielomianu w przez wielomian q . Podaj stopień otrzymanej reszty.

- a) $w(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x$, $q(x) = 3x - 1$
 b) $w(x) = -2x^3 + x^2 + 3x + 2$, $q(x) = x^2 - 3$
 c) $w(x) = 3x^4 + 2x^3 + x$, $q(x) = 3x^2 - x + 1$
 d) $w(x) = x^5 + 2x^4 - 3$, $q(x) = x^3 - 2x$

11. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian w jest podzielny przez wielomian u ?

- a) $w(x) = 4x^3 - 2x^2 + ax + b$, $u(x) = x^2 + x + 1$
 b) $w(x) = -6x^3 + 5x^2 - ax + 2b$, $u(x) = 2x^2 - x + 3$
 c) $w(x) = x^4 + ax^2 + b$, $u(x) = x^2 + 2x + 5$

12. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomian w jest podzielny przez wielomian u ?

- a) $w(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + m$, $u(x) = x^2 + 2x + n$
 b) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - m$, $u(x) = x^2 + 3x - n$
 c) $w(x) = -9x^3 + 3x^2 + mx + 1$, $u(x) = 3x^2 - nx + 1$

*1.8. Równość wielomianów

Zestaw I

1. Wśród wielomianów: f , g , h i k wskaż wielomiany równe.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 1)^4 - (2x^2 - 1)^4 \\ g(x) &= 4(2\sqrt{3}x^2 + 1)^2 - 8\sqrt{3}x^2 \\ h(x) &= (2x^2 + 1)^3 - (2x^2 - 1)^3 \\ k(x) &= 4x^2(4x^2 + 2)^2 - 64x^4 \end{aligned}$$

2. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomiany u i w są równe?

- a) $u(x) = ax^3 + (b - 3)x^2 + x + a + b$, $w(x) = x^3 - 4x^2 + x$
 b) $u(x) = (a^2 - 1)x^3 + (b - a)x^2 + a(a - 1)x + 4$, $w(x) = 4x^2 + 4$
 c) $u(x) = (b - a)x^4 + (4b - a)x^3 + ab$, $w(x) = -2x^4 + 4x^3 + 8$

3. Niech $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 2$. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian w jest wielomianem zerowym?

- a) $w(x) = f(x) + g(x) + h(x) - 2x^3$
 b) $w(x) = h(x) - f(x) \cdot g(x)$
 c) $w(x) = (4x^2 - 1) \cdot g(x) - f(x) \cdot h(x)$

4. Dane są wielomiany: $f(x) = 2ax^3 + (a + 5)x + 1$, $g(x) = ax^2 - x$ oraz $h(x) = ax^3 + x^2 - (a + 1)x$. Dla jakich wartości parametru a wielomian $w(x) = x^2 f(x) + g(x) \cdot h(x)$ jest wielomianem zerowym?

5. Dla jakich wartości parametrów a i b prawdziwa jest równość wielomianów?

- a) $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = (x^2 - ax + b)(x^2 - 1)$
 b) $-x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x = (ax^2 + bx + 1)(x^2 + x)$
 c) $4x^3 + x^2 + x - 3 = (x^2 + x + 1)(ax + b)$
 d) $x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x^3 + ax + b)(x^2 - 2)$

6. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + ax + b$, jeśli reszta z dzielenia w przez wielomian $q(x) = x^2 + 2x - 2$ jest równa:

- a) 0, b) 1, c) $x + 1$, d) $3x - 2$.

7. Wyznacz współczynniki: a , b i c wielomianu $w(x) = x^5 - 3x^3 + ax^2 + bx + c$, jeśli reszta z dzielenia w przez wielomian $q(x) = x^3 + x$ jest równa:

- a) 2, b) $2x - 1$, c) $x^2 + x + 5$.

Test jednokrotnego wyboru

8. Wielomian $w(x) = (x^2 - 2)^2 - (2x - 1)^2$ jest równy wielomianowi:

- A. $p(x) = x^4 - 4x + 3$,
 B. $q(x) = x^4 - x^2 + 3$,
 C. $r(x) = x^4 - 8x^2 - 4x + 3$,
 D. $s(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 3$.

9. Wielomian $u(x) = (a^2 - 3)x^3 + 3x^2 - (a^2 + \sqrt{3}a)x + 1$ jest równy wielomianowi $w(x) = (a^4 - 9)x^3 + 3x^2 + 1$ dla:

- A. $a = -3$, B. $a = -\sqrt{3}$, C. $a = \sqrt{3}$, D. $a = 3$.

Zestaw II

10. Dla jakich wartości parametrów a i b prawdziwa jest równość wielomianów?

- $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 - ax + 1)(x - b)$
- $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = (ax^2 + x + 1)(x^2 + b)$
- $3x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 3x - 4 = (x^2 + x + a)(bx^2 + x + 1)$
- $-2x^5 + 3x^4 - x^3 = (ax^3 + x^2)(bx^2 - x)$

11. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian w jest podzielny przez wielomian q ?

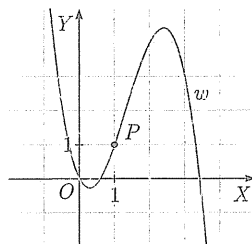
- $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + b^2 - a - 1$, $q(x) = x^2 + 3x - 1$
- $w(x) = x^4 + (a + b)x^3 + (a - b)x^2 + a^2x + b - 1$, $q(x) = x^2 - x + 1$

12. Dla jakich wartości parametrów: a , b i c wielomiany u i w są równe?

- $u(x) = (a - 2)x^3 + bx^2 + 4x + c$, $w(x) = 2x^3 + bx^2 + (2a + b)x + a + 3$
- $u(x) = 5x^2 - 19x + 18$,
 $w(x) = a(x - 1)(x - 2) + b(x - 2)(x - 3) + c(x - 1)(x - 3)$
- $u(x) = (x - a)^2(x - b)$, $w(x) = cx^3 - 5x^2 + 3x + 3 + 2a$

13. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = -x^3 + (a + b)^2x^2 + (b - a)x$, do którego należy punkt P . Wielomian w jest równy wielomianowi $u(x) = x^2(2c - x) - cx$. Wyznacz:

- wartości parametrów: a , b i c ,
- pierwiastki wielomianu w .



*1.9. Twierdzenie Bézouta

Zestaw I

1. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

- $w(x) = x^4 - x^3 + 3x^3 - 5x + 2$, $q(x) = x - 1$
- $w(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 7x - 5$, $q(x) = x + 1$
- $w(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 3$, $q(x) = x - 2$
- $w(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x - 5$, $q(x) = x + 5$
- $w(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$, $q(x) = 2x - 1$

2. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

- $w(x) = x^4 - 5x^2 + 7$, $q(x) = x + 2$
- $w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 2x - 8$, $q(x) = x - 3$
- $w(x) = 8x^4 - 10x^3 + x - 3$, $q(x) = x + \frac{1}{2}$
- $w(x) = 27x^3 - 3x^2 + 4$, $q(x) = 3x - 1$
- $w(x) = -4x^4 + 5x^2 + 6x + 5$, $q(x) = 2x + 1$

3. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $a = -1$
- $w(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$, $a = 7$
- $w(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$, $a = 2$
- $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 6x + 20$, $a = -5$
- $w(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$, $a = -\frac{1}{2}$

4. Dla jakich wartości m wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

- $w(x) = 2x^3 + mx^2 - 4x + 3$, $q(x) = x - 1$
- $w(x) = mx^3 - x^2 + 2m^2x + 16$, $q(x) = x + 2$
- $w(x) = -x^3 + mx^2 + 4x + m^2 + 23$, $q(x) = x - 3$
- $w(x) = 8x^3 + mx^2 - m^3 + 1$, $q(x) = 2x + 1$

5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u .

- $w(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $u(x) = (x + 1)(x - 2)$
- $w(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3$, $u(x) = x^2 + 4x - 5$
- $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2$, $u(x) = 2x^2 - 3x - 2$
- $w(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 8$, $u(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$

Test jednokrotnego wyboru

6. Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 - 18x^2 - 3x + 32$ przez dwumian $x + \sqrt{2}$ jest równa:

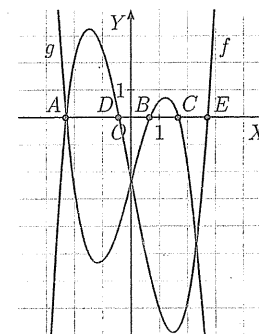
- A. -2 , B. $\sqrt{2}$, C. 2 , D. $3\sqrt{2}$.

7. Dany jest wielomian $w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ i dwumian $q(x) = x - a$, gdzie $a \in \{-1, 1, 2, 3\}$. Reszta z dzielenia w przez q jest największa dla:
A. $a = -1$, B. $a = 1$, C. $a = 2$, D. $a = 3$.
8. Który z poniższych wielomianów jest podzielny przez dwumian $\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$?
A. $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 12$
B. $q(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 2$
C. $r(x) = x^3 - 5x^2 - x + 14$
D. $s(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$
9. Niech $w(x) = x^3 - 3x^2 + m^4 - 2m^2 - 3$. Ile jest wartości m , dla których wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - 3$?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zestaw II

10. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez:
a) $(x - 4)(x + 3)$, jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 4$ wynosi 9, a przez dwumian $x + 3$ wynosi 2,
b) $2x^2 + 9x - 5$, jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $2x - 1$ wynosi 10, a przez dwumian $x + 5$ wynosi $-6\frac{1}{2}$,
c) $(x^2 - 1)(x + 2)$, jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ wynosi 2, przez dwumian $x + 1$ wynosi -6 , a przez dwumian $x + 2$ wynosi 8.
11. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u , nie wykonując dzielenia.
a) $w(x) = x^4 + 5x^3 + x + 6$, $u(x) = (x + 5)(x - 1)$
b) $w(x) = x^{100} - x + 2$, $u(x) = x^2 - 1$
c) $w(x) = (x^2 - x - 1)^5 - 3$, $u(x) = x^2 - 3x + 2$
d) $w(x) = \left(-\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}\right)^5$, $u(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
12. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian w jest podzielny przez wielomian u ?
a) $w(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + (a - 1)x + b$, $u(x) = x^2 - 1$
b) $w(x) = ax^3 + bx^2 + 27x - 18$, $u(x) = x^2 - 5x + 6$
c) $w(x) = 5x^4 + (a - b)x^3 + (3b - 2a)x^2 - 6x - 1$, $u(x) = (x + 1)^2(x - 1)$

13. Niech $w(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 15x^2 + cx - 12$, $u(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$. Wyznacz wartości parametrów: a , b i c , dla których wielomian w jest podzielny przez u . Rozłóż wielomian w na czynniki i oblicz jego pierwiastki.
14. Wyznacz wartości współczynników p i q oraz oblicz pierwiastki wielomianu w , jeśli:
a) $w(x) = x^3 + px^2 - 4x + q$, a jego pierwiastki są postaci: a , $-a$ i $3a$,
b) $w(x) = x^3 + 7x^2 + px + q$, a jego pierwiastki są postaci: a , $2a$ i $a + 1$.
15. Wyznacz współczynniki wielomianu w , jeśli:
a) $w(x) = x^4 + px + q$, a jego jedynymi pierwiastkami są liczby: -2 i 1 ,
b) $w(x) = x^5 + px^2 + qx + r$, a jego jedynymi pierwiastkami są liczby: -2 , -1 i 2 .



16. Punkt $A(-\sqrt{5}, 0)$ jest punktem przecięcia wykresów wielomianu $f(x) = x^3 - 6x - \sqrt{5}$ i wielomianu $g(x) = -x^3 + 4x - \sqrt{5}$ z osią odciętych (rysunek obok). Wyznacz współrzędne pozostałych punktów przecięcia tych wykresów z osią OX .

*1.10. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu

Zestaw I

1. Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrażu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są pierwiastkami tego wielomianu.
a) $w(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ b) $w(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$
2. Rozwiąż równanie.
a) $2x^3 + x^2 - 3 = 0$ e) $x^3 + 6x^2 = -6x - 5$
b) $x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$ f) $3x^3 - x = 12 - 10x^2$
c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ g) $3x^3 + 4 = 5x^2 + 4x$
d) $2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$ h) $5x^3 - 19x^2 = 38x - 40$

3. Wyznacz pierwiastki wielomianu w i rozłóż go na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
 b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8$
 c) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
 d) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$ d) $x^4 + x^3 - 4x^2 = 3 - 5x$
 b) $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$ e) $x^4 + x + 6 = x^3 + 7x^2$
 c) $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2 = 0$ f) $x^4 + x^2 = 8 - 6x$

5. Rozwiąż równanie, wiedząc, że ma ono pierwiastek wymierny.

- a) $2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$ d) $2x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
 b) $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 0$ e) $3x^4 - 10x^3 + x = 0$
 c) $3x^3 + 17x^2 - 3x - 1 = 0$ f) $5x^5 + \frac{4}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 = 0$

Test jednokrotnego wyboru

6. Dany jest wielomian $w(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + 42$ o współczynnikach całkowitych. Jaka jest największa możliwa liczba różnych pierwiastków całkowitych tego wielomianu?

- A. 8 B. 14 C. 16 D. 42

7. Niech $w(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 6x + 24$. Ile pierwiastków całkowitych ma wielomian w ?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. Dany jest wielomian $w(x) = 12x^3 + a_2x^2 + a_1x - 15$ o współczynnikach całkowitych. Która z podanych liczb nie może być pierwiastkiem tego wielomianu?

- A. -1,5 B. -1,25 C. 0,25 D. 0,6

Zestaw II

9. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1}{2}x^3 + 7 = 3x(x + \frac{3}{2})$
 b) $x(x + 2)^2 - (2x + 1)^2 = 6x + 3$
 c) $(3x^2 + 2x + 1)(2x^2 + x) = 2(x^3 + 9x^2 - 1)$
 d) $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x - 1) = -6$

10. Dany jest wielomian $w(x) = 2x^3 + ax^2 - (a^2 + 1)x + 1$. Dla jakiej całkowitej wartości parametru a ma on dwa różne pierwiastki całkowite?

11. Krawędzie prostopadłościanu mają długości: 1, 2 i 3. Po wydłużeniu każdej z nich o ten sam odcinek równy x otrzymano drugi prostopadłościan.

- a) Wyznacz wielomian w zmiennej x opisujący różnicę objętości tych prostopadłościanów.
 b) Dla jakiej wartości x różnica objętości tych prostopadłościanów jest równa 54?

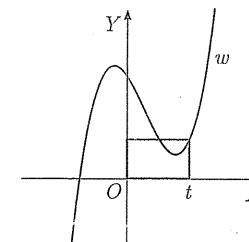
12. Krawędzie prostopadłościanu mają długości: 3, 5 i 7. Po wydłużeniu każdej z nich o ten sam odcinek równy x otrzymano drugi prostopadłościan.

- a) Wyznacz wielomian w zmiennej x opisujący objętość powstałego prostopadłościanu.
 b) Oblicz x , jeśli objętość drugiego prostopadłościanu jest trzykrotnie większa od objętości pierwszego.

13. Dany jest wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych. Wykaż, że jeśli $w(0)$ i $w(1)$ są liczbami nieparzystymi, to wielomian w nie ma pierwiastków całkowitych.

14. Jeden z wierzchołków prostokąta należy do wykresu wielomianu $w(x) = x^3 - 1,5x^2 - 1,5x + 3$, a pozostałe leżą na osiach układu współrzędnych (rysunek obok).

- a) Podaj wzór funkcji P opisującej pole tego prostokąta w zależności od t , gdzie $t > 0$.
 b) Dla jakich wartości t , gdzie $t > 0$, prostokąt jest kwadratem? Oblicz jego pole dla tych wartości t .



15. Wykaż, że dla każdego całkowitego argumentu x wartość wielomianu $w(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^2 + \frac{1}{4}x$ jest liczbą całkowitą.

*1.11. Pierwiastki wielokrotne

Zestaw I

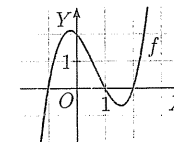
- Sprawdź, czy liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w .
a) $w(x) = (x-1)^2(x^2-x-6)$ b) $w(x) = (x-1)^2(3x^2-5x+2)$
- Sprawdź, czy wielomian w ma pierwiastek trzykrotny.
a) $w(x) = (x-1)^3(2x^2-4x+2)$ b) $w(x) = (x-1)^3(5x^3-10x)$
- Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.
a) $x^3-2x^2+x=0$ c) $x^5+2x^4-3x^3=0$ e) $4x^6-x^2=0$
b) $x^4-4x^3+4x^2=0$ d) $x^4-6x^2+9=0$ f) $x^5-5x^3+4x=0$
- Rozłóż wielomian w na czynniki. Czy ma on pierwiastki dwukrotne?
a) $w(x) = (x-1)^2(9x^2-6x+1)$
b) $w(x) = (x+x^2)(x^4+x)$
c) $w(x) = (16x^5-x)(6x^3+3x^2)$
d) $w(x) = (25-x^2)(x^3-4x^2-5x)$
e) $w(x) = (x^3-x)^2(x^3+2x^2-3x)$
f) $w(x) = (x^2-x-2)^2(3x^4+x^3-2x^2)$
- Uzasadnij, że wielomian w nie ma pierwiastków wielokrotnych.
a) $w(x) = x^4-2x^3+x^2-2x$ c) $w(x) = x^3-2x^2-5x+6$
b) $w(x) = 4x^3+12x^2-2x-6$ d) $w(x) = 3x^4+2x^3+2x^2+2x-1$
- Liczba a jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
a) $w(x) = x^3-12x+16$, $a=2$
b) $w(x) = 4x^4+4x^3-13x^2-2x+7$, $a=1$
c) $w(x) = 5x^5+9x^4-7x^3-19x^2-6x+2$, $a=-1$

Test jednokrotnego wyboru

- Wielomian $w(x) = (x-2)^3(x^2-4)(x^2+x-6)$ ma trzy pierwiastki. Jeden z nich jest pierwiastkiem:
A. dwukrotnym, C. czterokrotnym,
B. trzykrotnym, D. pięciokrotnym.

- Dany jest wielomian $w(x) = (x^2-4x+3)(x^2+ax+6)$. Liczba 3 jest jego dwukrotnym pierwiastkiem dla:
A. $a=3$, B. $a=2$, C. $a=-5$, D. $a=-9$.

- Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu f stopnia 3. Ile pierwiastków dwukrotnych ma wielomian $w(x) = (x+6)^2(x^2+1)(x^2-4) \cdot f(x)$?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



Zestaw II

- Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.
a) $x^3+3x^2-4=0$ d) $x^6-3x^4+3x^2-1=0$
b) $x^3-7x^2+15x-9=0$ e) $x^3(x^2-x-3)=2x-5x^2$
c) $x^5-2x^4+9x^2=4-2x+\frac{9}{2}x^3$ f) $x^2(x^2+2x-6)=8(x-1)$
- Dla jakich wartości parametru a liczba x_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu w ?
a) $w(x) = (x-5)(x^2-ax+5)$, $x_0=5$, $k=2$
b) $w(x) = (x^2+a^2x-3a-9)(x^2-9)$, $x_0=3$, $k=2$
c) $w(x) = 4x^4+x^2+(a^2-1)x+(a-1)^2$, $x_0=-\frac{1}{2}$, $k=2$
d) $w(x) = x^4+x^3+(1-a^2)x^2-5x+a$, $x_0=-1$, $k=3$
- Dla jakich wartości parametrów a i b liczba x_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu w ?
a) $w(x) = x^3-5x^2+ax+b$, $x_0=3$, $k=2$
b) $w(x) = x^4-4x^3+ax^2+8x+b$, $x_0=2$, $k=2$
c) $w(x) = x^4+ax^3+bx^2+2x-1$, $x_0=1$, $k=3$
- Wielomian w ma pierwiastek jednokrotny x_1 i pierwiastek dwukrotny x_2 . Oblicz współczynniki p i q oraz pierwiastki x_1 i x_2 , jeśli:
a) $w(x) = x^3-5x^2+px+q$, a pierwiastek x_2 jest trzy razy mniejszy od pierwiastka x_1 ,
b) $w(x) = x^3+px^2+qx+8$, a pierwiastek x_2 jest o 4 większy od pierwiastka x_1 , który jest liczbą całkowitą.

14. Podaj wzór wielomianu, który przy dzieleniu przez dwumian $x - 1$ daje resztę 2, ma pierwiastek trzykrotny równy $\frac{1}{2}$, a jego stopień wynosi k . Czy istnieje tylko jeden taki wielomian?

a) $k = 3$ b) $k = 4$ c) $k = 6$

15. Dany jest wielomian $w(x) = x^6 - 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 - 5x - 1$. Liczba -1 jest jego dwukrotnym pierwiastkiem, a punkt $A(1, -1)$ należy do wykresu tego wielomianu.

a) Oblicz współczynniki: a , b i c .

b) Wykaż, że liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w , a następnie wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

16. Wykaż, że dla każdej wartości parametru p liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu

$$w(x) = x^4 + (p - 2)x^3 + (3 - 2p)x^2 + (p - 4)x + 2.$$

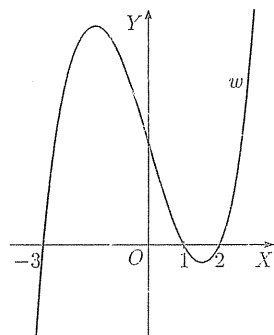
17. Dla jakich wartości parametru k wielomian $w(x) = x^3 - 12x + k$ ma pierwiastek dwukrotny? Wyznacz ten pierwiastek.

*1.12. Wykres wielomianu

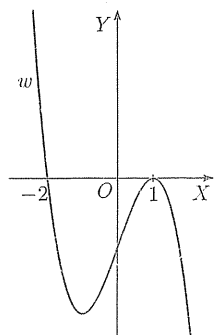
Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono szkic wykresu wielomianu w stopnia n . Ustal znak współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x . Wskaż pierwiastki wielomianu w o krotności parzystej.

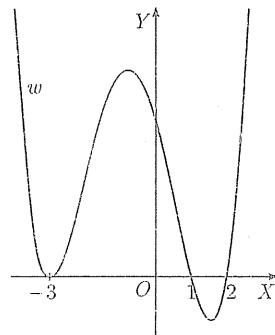
a) $n = 3$



b) $n = 3$



c) $n = 4$

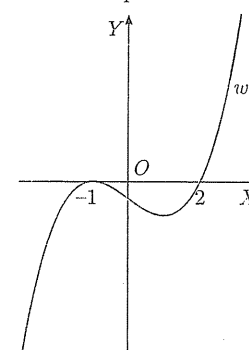
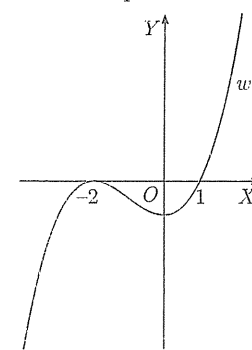
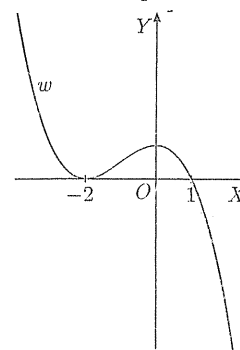


2. Na rysunku przedstawiono szkic wykresu wielomianu w . Podaj wzór tego wielomianu, wiedząc, że $\text{st}(w) = 3$ i znając wartość współczynnika a_3 .

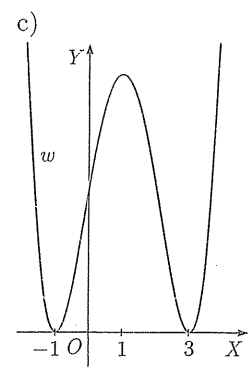
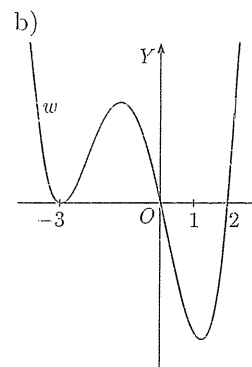
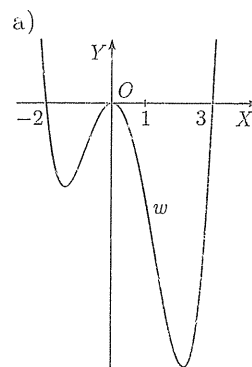
a) $a_3 = -\frac{1}{4}$

b) $a_3 = \frac{1}{4}$

c) $a_3 = \frac{1}{4}$



3. Na rysunku przedstawiono szkic wykresu wielomianu w . Podaj jego wzór, jeśli $\text{st}(w) = 4$ i $a_4 = \frac{1}{2}$.



4. Wyznacz pierwiastki wielomianu w i podaj ich krotności. Naszkicuj wykres tego wielomianu.

a) $w(x) = x(x + 2)(x - 3)$

e) $w(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$

b) $w(x) = -(x - 1)(x + 2)^2$

f) $w(x) = -2x^2(x + 1)(x - 3)$

c) $w(x) = (x^2 - 9)(1 - x)$

g) $w(x) = (x + 5)^2(x - 1)^2$

d) $w(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)(x - 2)$

h) $w(x) = -x^2(x + 4)(3x - 9)$

5. Naszkicuj wykres wielomianu w . Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości ujemne?

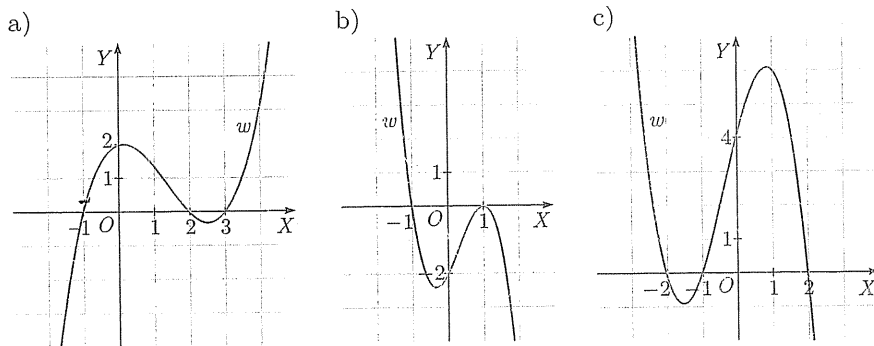
a) $w(x) = (x + 5)(x - 2)^2$

c) $w(x) = -(x^2 - 4)(x + 1)^2$

b) $w(x) = (x - 3)(x^2 - 9)$

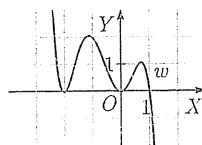
d) $w(x) = 2(x^2 - x)(x^2 - 1)$

6. Podaj wzór wielomianu w trzeciego stopnia, którego wykres przedstawiono poniżej.



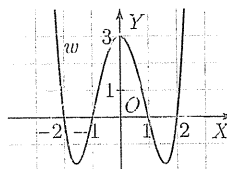
Test jednokrotnego wyboru

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu w . Ile spośród pierwiastków tego wielomianu jest krotności parzystej?
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
8. Ile jest liczb całkowitych należących do przedziału $\langle -10; 10 \rangle$, dla których wielomian $w(x) = x^2(x-7)(x+3)$ przyjmuje wartości dodatnie?
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11



9. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu w czwartego stopnia. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest równy:

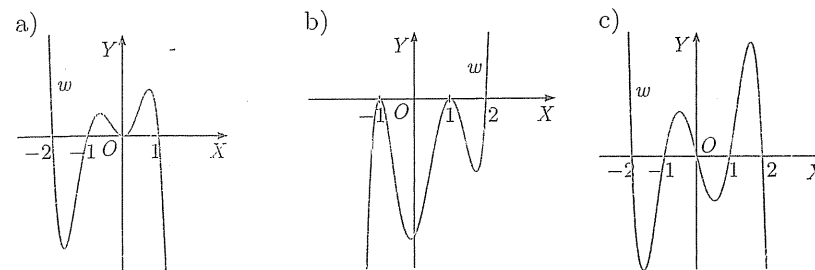
A. 1, B. $\frac{3}{4}$, C. 3, D. 6.



Zestaw II

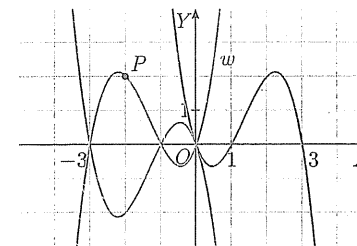
10. Naskicuj wykres wielomianu w . Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości nieujemne?
- a) $w(x) = (x+2)(x+1)^2(x-2)^3$
b) $w(x) = 2x(x^2+3x)^3(x-1)^2$
c) $w(x) = -(x^2+x)^2(2-x)^2(x^2-1)$
d) $w(x) = (x^2+1)(4-x)^3(x^2-3x-4)^2$

11. Podaj wzór wielomianu w , którego szkic wykresu przedstawiono poniżej, jeżeli $\text{st}(w) = 5$ i $|a_5| = 2$.

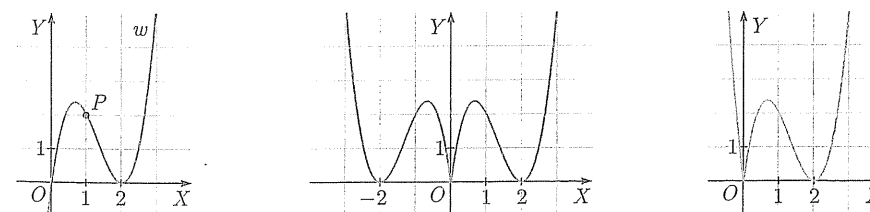


12. Pierwiastkami wielomianu w piątego stopnia są liczby: $-5, -3, 1$ i 3 , przy czym liczba 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym.
- a) Podaj wzór wielomianu w , jeśli $w(2) = 7$.
b) Naskicuj wykres wielomianu w i podaj argumenty, dla których wielomian ten przyjmuje wartości dodatnie.

13. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu w trzeciego stopnia, do którego należy punkt P , oraz wykresy wielomianów $f(x) = -w(x)$ i $g(x) = w(-x)$.
- a) Podaj wzór wielomianu w .
b) Podaj wzory wielomianów f i g oraz dopasuj do nich odpowiednie wykresy.



14. Naskicuj wykres wielomianu w oraz wykresy wielomianów $f(x) = -w(x)$ i $g(x) = w(-x)$.
- a) $w(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$ b) $w(x) = -x^3(x^2-4)^3(x+2)^2$
15. Poniżej przedstawiono wykres wielomianu w trzeciego stopnia, do którego należy punkt P , oraz wykresy funkcji $f(x) = |w(x)|$ i $g(x) = w(|x|)$.
- a) Podaj wzór wielomianu w .
b) Podaj wzory funkcji f i g oraz dopasuj do nich odpowiednie wykresy.



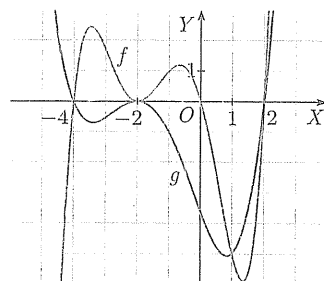
13. Pierwiastkami wielomianu $w(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ są liczby: $-1, 2$ i 3 . Oblicz współczynniki: a, b i c oraz rozwiąż nierówność $w(x) \geq x + 1$.

14. Dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu

$$w(x) = x^5 - x^4 - 3ax^2 + (3a + 2)x - 1$$

przez dwumian $x - a$ jest większa od 1?

15. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu f piątego stopnia oraz wykres wielomianu g czwartego stopnia. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności:



- a) $f(x) - g(x) > 0$,
b) $f(x) \cdot g(x) < 0$,
c) $f(x) \cdot g(x) \geq 0$.

16. Rozwiąż nierówność.

a) $x^4 - |2x^2 - 8| > 0$

b) $|x^3 - 1| < x^2 + x + 1$

17. Rozwiąż układ nierówności.

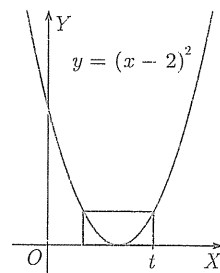
a) $-6 \leq (x + 3)(x + 2)(x - 1) \leq 0$

b) $-8 < x^3 \leq x|x + 2|$

*1.14. Wielomiany – zastosowania

Zestaw I

1. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe należą do paraboli o równaniu $y = (x - 2)^2$ (rysunek obok). Podaj wzór wielomianu opisującego pole tego prostokąta w zależności od t , gdzie $t > 2$. Jaka jest dziedzina tej funkcji? Dla jakiej wartości t pole tego prostokąta:



- a) jest równe 54,
b) jest większe od 16?

2. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe należą do paraboli $y = (x - 1)^2 + 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, jeżeli jego pole jest równe 24.

3. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku x . Krawędź boczna jest o 2 krótsza od krawędzi podstawy.

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego prostopadłościanu. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakich wartości x objętość tej bryły jest większa od 32?

4. Objętość prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku x , jest opisana wielomianem $V(x) = 8x^2 - 2x^3$, gdzie $x \in (0; 4)$.

a) Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu, jeśli jego objętość jest równa 16.

b) Wyznacz wielomian S opisujący sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu w zależności od x . Dla jakich wartości x suma ta jest równa 32?

Test jednokrotnego wyboru

5. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe znajdują się nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 16 - x^2$. Jeśli pole tego prostokąta jest równe 42, to jego przekątna może mieć długość:

A. $\sqrt{85}$,

B. $\sqrt{105}$,

C. $\sqrt{165}$,

D. $\sqrt{205}$.

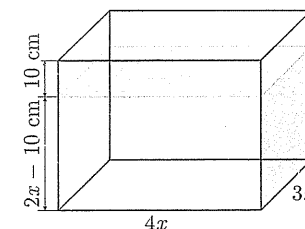
6. Do akwarium o wymiarach $4x \times 3x \times 2x$, gdzie x [cm], wiano 54 litry wody. Jeśli woda sięgnęła do wysokości $2x - 10$ cm (rysunek obok), to suma powierzchni ścianek bocznych tego akwarium jest równa:

A. 8 dm^2 ,

C. 70 dm^2 ,

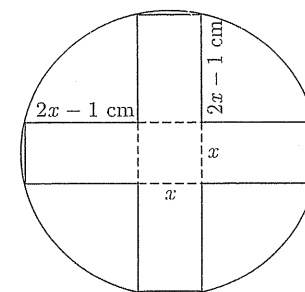
B. 63 dm^2 ,

D. 98 dm^2 .

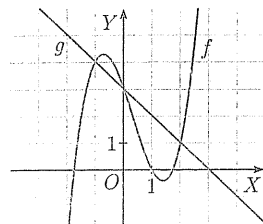


Zestaw II

7. Z tekturowego koła wycięto figurę w kształcie takim, jak pokazano na rysunku, i sklejono z niej otwarte prostopadłościenne pudełko. Podstawa pudełka ma kształt kwadratu o boku x , gdzie x [cm], a wysokość pudełka jest równa $2x - 1$ cm. Oblicz pole koła, jeśli objętość pudełka jest równa 162 cm^3 . Podaj wynik z dokładnością do 1 cm^2 .

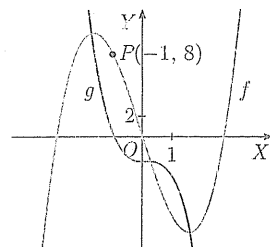


9. Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 + (b-a)x^2 - 3x + b$ i $g(x) = 3 - x$.



- a) Oblicz a i b .
b) Wyznacz miejsca zerowe wielomianu f .
c) Rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$.
10. Sprawdź, czy liczba a jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w .
a) $w(x) = (x-2)^2(x^3 - x^2 + x - 1)$, $a = 2$
b) $w(x) = (x+1)(x^4 + x^3 + x + 1)$, $a = -1$
11. Rozwiąż nierówność.
a) $(x-2)^2(x^2 - 1) < 0$
b) $(x-1)(x^2 + 3x - 4) > 0$
c) $(x^2 - 4)(x^3 - 8) \leq 0$
d) $(x^3 - 16x)(x^2 - 4) \leq 0$
e) $x(x^2 - 81)(9x - x^3) < 0$
f) $(x^4 - x)(x^3 - 2x^2 + x) \geq 0$
12. Sprawdź, który z dwumianów: $x - \sqrt{2}$, $x + 1$, $x + \sqrt{3}$ jest dzielnikiem wielomianu w .
a) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 4x - 2$
b) $w(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 6$
13. Wykaż, że liczba a jest pierwiastkiem podanego równania. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.
a) $x^3 - 2x + 1 = 0$, $a = 1$
b) $x^3 - 5x + 2 = 0$, $a = 2$
c) $x^4 - x^3 - x^2 = x + 2$, $a = -1$
d) $2x^4 + x^3 + x^2 = 1 - x$, $a = \frac{1}{2}$
14. Rozwiąż równanie, wiedząc, że ma ono pierwiastek całkowity.
a) $x^3 + x - 2 = 0$
b) $x^3 - 3x - 2 = 0$
c) $x^3 - x - 6 = 0$
d) $x^3 - 5x^2 - 3x + 15 = 0$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $f(x) = x^3 + ax + b$ i wielomianu $g(x) = -2x^3 + x^2 - 3$.



- a) Wyznacz a i b .
b) Rozwiąż nierówność $f(x) \geq g(x)$.

Zestaw II

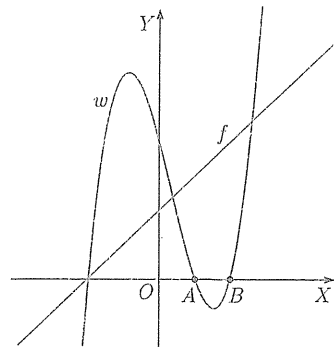
16. Wyznacz iloraz p i resztę r z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .
a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $q(x) = x - 2$
b) $w(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 3$, $q(x) = x + 3$
c) $w(x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5$, $q(x) = 2x + 1$
17. Przedstaw wielomian w w postaci $w(x) = (x-3) \cdot p(x) + r(x)$.
a) $w(x) = x^3 - x^2 - 3x - 4$
b) $w(x) = x^4 - x^2 + 3x - 1$
18. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .
a) $w(x) = 3x^3 - x^2 - 8$, $q(x) = x - 2$
b) $w(x) = 5x^4 + 2x^3 - x + 3$, $q(x) = x + 1$
c) $w(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 5$, $q(x) = 2x - 1$
19. Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 8$ przez dwumian $x + 1$ jest równa reszcie z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 2$. Oblicz współczynniki a i b , jeżeli liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu w .
20. Wykaż, że dla każdej wartości parametru p wielomian
$$w(x) = x^3 - (p+1)x^2 + (2p-3)x + 2$$

ma pierwiastek całkowity.
21. Dla jakich wartości parametru k podane równanie ma co najmniej jeden pierwiastek wymierny?
a) $x^3 + 3x^2 + kx - 2 = 0$
b) $2x^4 - 2x^3 + (k-1)x^2 + 1 = 0$
22. Rozwiąż równanie.
a) $x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$
b) $x^4 + 2x^3 - x^2 = 6 - 4x$
c) $10x^4 + 5x^3 - 1 = 3x^2 - x$
d) $2x^4 + 5x^3 - x^2 - x = 0$
e) $2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$
f) $x^4 + x^3 + x^2 = x + 2$
23. Rozwiąż nierówność.
a) $x^5 + x^3 - 2x < 0$
b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 > 0$
c) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 \geq 0$
d) $x^4 - 3x^3 - x^2 \leq 6 - 9x$
e) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 \geq 1 - 4x$
f) $(x^2 - 1)(x + 3) < x - 1$

24. Ustal, dla jakich wartości parametru m jedynym rozwiązaniem równania $-3x^3 + x^2 + 2m = 0$ jest liczba m .

25. Dla jakich wartości parametru a wielomian $w(x) = (x^2 - a)(2x^2 - 7x + 3)$ ma pierwiastek dwukrotny?

26. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej $f(x) = x + 2$ i wykres wielomianu w trzeciego stopnia o współczynniku przy najwyższej potęgze zmiennej x równym 1. Wielomian w jest podzielny przez trójmian $x^2 + x - 2$, a reszta z dzielenia w przez dwumian $x + 1$ wynosi 6.



a) Wyznacz wzór wielomianu w oraz współrzędne punktów A i B .

b) Rozwiąż nierówność $f(x) \leq w(x)$.

27. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomiany $u(x) = 6x^5 + 13x^3 + 6x$ oraz $w(x) = (ax^3 + bx)(bx^2 + a)$ są równe?

28. Wyznacz wartości parametru a , dla których reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + (a + 2)x + 4$ przez dwumian $x - p$ jest równa r , jeśli:

a) $p = -1, r = 5$,

b) $p = 3, r = 1$.

29. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

a) $w(x) = x^3 + (a^3 - 1)x + 2 + 6a$, $q(x) = x + 2$

b) $w(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x - a$

Zestaw III

30. Liczby $1 - \sqrt{5}$ i $1 + \sqrt{5}$ są pierwiastkami wielomianu

$$w(x) = 3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 14x + 4.$$

Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

31. a) Równanie $x^3 + x^2 + px + q = 0$ ma pierwiastek jednokrotny x_1 oraz o 2 mniejszy pierwiastek dwukrotny x_2 . Wyznacz współczynniki p i q oraz pierwiastki x_1 i x_2 .

b) Wyznacz pierwiastki: x_1, x_2, x_3 równania $x^3 + px^2 + 11x + q = 0$, jeśli $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 3$.

32. W wielomianie w suma współczynników przy parzystych potęgach zmiennej x jest równa sumie współczynników przy nieparzystych potęgach x . Wykaż, że liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

33. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian p , jeśli:

a) $p(x) = x - 3$, a reszta z dzielenia w przez $2x^2 - 5x - 3$ jest równa $5 - x$,

b) $p(x) = x + 2$, a reszta z dzielenia w przez $x^3 - 5x - 2$ jest równa $2x^2 + x - 1$,

c) $p(x) = x^2 - 1$, a reszta z dzielenia w przez $x^4 + 2x^2 - 3$ jest równa $x^3 + 5$.

34. Dla jakich wartości a, b i c wielomian $w(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + c$ jest podzielny przez wielomian $u(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$?

35. Dla jakich wartości m i n wielomian $w(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + mx + 1$ jest podzielny przez wielomian $u(x) = x^2 - nx + 1$?

36. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego jednym z pierwiastków jest liczba:

a) $2\sqrt{2}$,

b) $1 - \sqrt{2}$,

c) $2 - \sqrt{3}$.

37. Rozwiąż równanie.

$$4(x - 1)^4 - 17(x^2 - 2x + 1) + 4 = 0$$

38. Wykaż, że równanie $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$ ma dwa pierwiastki podwójne.

39. Rozwiąż równanie.

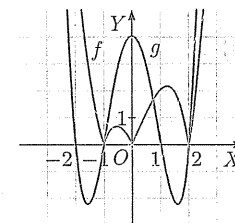
a) $x^3 + 2x^2 + |5x + 10| = 0$

b) $2 \cdot |2x^2 - 5| - x^3 + 7x = 0$

40. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji

$f(x) = |x(x + 1)(x - 2)|$ i $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$.



41. Rozwiąż nierówność.

a) $2 \cdot |x| \leq x^3 - x^2 - 4x$

b) $|3x^3 + x| > x^4 + 3$

42. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} 4x - y^2 = 3 \\ xy^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y^2 = 2 \\ x^2 - 3xy^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

43. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n wielomian

$$w(x) = (x+2)^{2n} + (x+3)^n - 1$$

jest podzielny przez trójmian $x^2 + 5x + 6$.

44. Przeczytaj przykład w ramce, a następnie wykaż, że wielomian w przyjmuje tylko wartości nieujemne.

Przykład

Zauważ, że:

$$(x-1)(x-4) = (x^2 - 5x + 5) - 1$$

$$(x-2)(x-3) = (x^2 - 5x + 5) + 1$$

Po pomnożeniu równości stronami otrzymujemy:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x^2 - 5x + 5)^2 - 1$$

a) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1$

b) $w(x) = (x-1)(x-3)(x-7)(x-9) + 40$

45. Dla jakich całkowitych argumentów x wartość wielomianu

$$w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 3$$

jest liczbą pierwszą?

46. Wykaż, że nie istnieje wielomian w trzeciego stopnia o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki $w(2) = 1$ i $w(-2) = 2$.

47. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej x wielomian $w(x) = x^5 - x$ jest podzielny przez 5.

2. Funkcje wymierne

2.1. Proporcjonalność odwrotna

Zestaw I

- Samochód ma przebyć drogę 270 km ze średnią prędkością v . Zapisz wzór określający zależność między czasem jazdy t (w godzinach) a prędkością v (w kilometrach na godzinę).
 - Oblicz czas jazdy dla $v = 30$ km/h, $v = 60$ km/h i $v = 90$ km/h.
 - Dla jakiej wartości v czas jazdy jest równy 6 godzin, a dla jakiej – 3 godziny i 45 minut?
- Wiadomo, że jeżeli temperatura gazu jest stała, to jego ciśnienie jest odwrotnie proporcjonalne do objętości. W naczyniu o objętości 10 litrów znajduje się gaz pod ciśnieniem 6 atmosfer.
 - W naczyniu o jakiej objętości ciśnienie tego gazu będzie wynosiło 5 atmosfer?
 - Oblicz ciśnienie tego gazu w naczyniu o objętości 15 litrów.
- Na podstawie podanej informacji oceń, czy dodatnie wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne.
 - Jeżeli x wzrasta o 1, to y maleje o 2.
 - Jeżeli x wzrasta trzykrotnie, to y maleje trzykrotnie.
 - Jeżeli x maleje pięciokrotnie, to y wzrasta pięciokrotnie.
 - Jeżeli x wzrasta dwukrotnie, to y wzrasta czterokrotnie.
- Czy podane wielkości są odwrotnie proporcjonalne? Jeśli tak, podaj współczynnik tej proporcjonalności.
 - Długości boków prostokąta o ustalonym obwodzie L .
 - Długość podstawy równoległoboku o ustalonym polu P i wysokość opuszczona na tę podstawę.
 - Długość przekątnej kwadratu i jego pole P .
 - Objętość sześcianu i długość jego krawędzi a .
 - Wysokość prostopadłościanu o ustalonej objętości V i jego pole podstawy.

5. Wielkości a i b są odwrotnie proporcjonalne ze współczynnikiem proporcjonalności równym 6. Sprawdź, czy wielkości x i y też są odwrotnie proporcjonalne. Jeśli tak, podaj współczynnik tej proporcjonalności.

a) $x = 2a, y = 3b$ c) $x = 2a, y = \frac{1}{2b}$
 b) $x = (2 - \sqrt{3})a, y = (2 + \sqrt{3})b$ d) $x = \frac{2}{a}, y = \frac{3}{b}$

6. Kwotę 50 zł wypłacono monetami o jednakowym nominale. Podaj wzór funkcji f opisującej zależność liczby wypłaconych monet n od ich nominalu x (w zł).

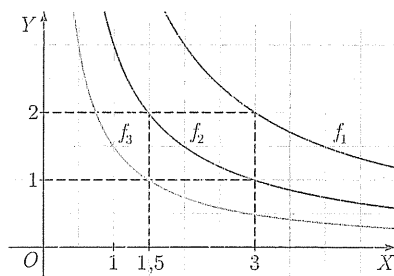
- a) Wyznacz dziedzinę funkcji f .
 b) Podaj interpretację $f(0,1)$ i $f(\frac{1}{5})$.
 c) Oblicz $f(1)$ i $f(2)$.
 d) Podaj wartości najmniejszą i największą funkcji f .

7. Sprawdź, czy punkty A i B należą do wykresu tej samej proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$. Jeżeli tak, podaj wzór tej proporcjonalności i naszkicuj jej wykres.

- a) $A(4, 8), B(2, 4)$
 b) $A(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{5}), B(\frac{2}{3}, 4\frac{1}{2})$
 c) $A(3 - \sqrt{8}, 2\sqrt{2} + 3), B(\sqrt{8}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

8. Na rysunku obok przedstawiono wykresy pewnych proporcjonalności odwrotnych.

- a) Sprawdź, do którego z wykresów należy punkt $P(7\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$.
 b) Który z wykresów przedstawia zależność o największym współczynniku proporcjonalności?
 c) Do którego z wykresów należy najmniej punktów o obu współrzędnych całkowitych?
 d) Dla każdej z tych zależności podaj liczby odwrotnie proporcjonalne do 1,2 oraz 7,2.



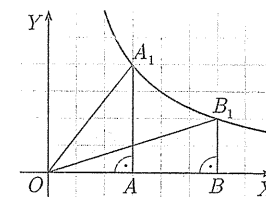
Test jednokrotnego wyboru

9. Punkt $W(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$ należy do wykresu pewnej proporcjonalności odwrotnej. Do tego samego wykresu należy również punkt:

- A. $P(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$, C. $R(2\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$,
 B. $Q(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, D. $S(4, 4)$.

10. Na rysunku obok przedstawiono wykres pewnej proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$. Jeśli pole trójkąta OAA_1 jest równe P , to pole trójkąta OBB_1 wynosi:

- A. P , C. a ,
 B. $\frac{1}{2}P$, D. $2a$.



11. Samochód przebył trasę z miasta A do miasta B , liczącą 120 km, ze średnią prędkością 40 km/h. Ile była równa jego średnia prędkość w drodze powrotnej, jeśli średnia prędkość na całej trasie wynosiła 48 km/h?

- A. 40 km/h B. 50 km/h C. 60 km/h D. 80 km/h

Zestaw II

12. Dla jakiej wartości parametru m punkty A i B należą do wykresu tej samej proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$? Podaj wartość współczynnika a .

- a) $A(m, m - 3), B(4, -2m)$
 b) $A(\sqrt{3} - \sqrt{2}, m(3 + \sqrt{6})), B(\sqrt{3} - 3m, \frac{\sqrt{3}}{3})$

13. Wyznacz współrzędne punktu P , wiedząc, że należy on do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{36}{x}$ oraz:

- a) leży na prostej o równaniu $y = x$,
 b) jego pierwsza współrzędna jest cztery razy większa od drugiej,
 c) jego pierwsza współrzędna jest o 5 mniejsza od drugiej.

14. Funkcja f każdej liczbie naturalnej $n > 0$ przyporządkowuje wynik dzielenia pewnej liczby przez n . Podaj wzór funkcji f , jeśli $f(5) = 9,6$. Wyznacz zbiory $A = \{n \in \mathbb{N}_+ : f(n) \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{n \in \mathbb{N}_+ : f(n) > 15\}$.

2.2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

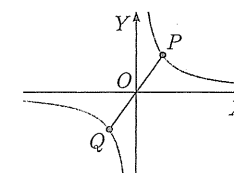
Zestaw I

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, wiedząc, że należy do niego punkt P . Podaj przedziały monotoniczności funkcji f i oblicz jej wartość dla argumentu $x = 0,4$.
 - $P(8, \frac{1}{2})$
 - $P(\frac{2}{3}, -12)$
 - $P(\sqrt[3]{0,25}, \sqrt[3]{0,5})$
 - $P(\sqrt{3} - 2, 4 + 2\sqrt{3})$
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest zbiór $D = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$. Naszkicuj wykres tej funkcji i podaj jej zbiór wartości, jeżeli:
 - $a = 12$,
 - $a = -4$,
 - $a = \frac{3}{2}$,
 - $a = -\frac{2}{3}$.
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest przedział $\langle 2; 8 \rangle$. Wyznacz a , jeżeli:
 - największa wartość funkcji f jest równa 6,
 - najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\frac{1}{6}$,
 - najmniejsza wartość funkcji f jest równa -8 ,
 - zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle \frac{5}{2}; 10 \rangle$.
- Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz a , jeśli funkcja f przyjmuje wartości większe od 2 tylko dla argumentów z przedziału:
 - $(0; 7)$,
 - $(-5; 0)$,
 - $(-\frac{1}{6}; 0)$.
- Jednym z wierzchołków prostokąta jest punkt $O(0, 0)$, a wierzchołek przeciwny do niego znajduje się w punkcie A należącym do hiperboli $y = \frac{a}{x}$. Uzasadnij, że pole tego prostokąta nie zależy od wyboru punktu A . Ile jest ono równe?
- Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{7}{3x}$. Ustal, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji g . Podaj wzór i przedziały monotoniczności funkcji g .
 - $g(x) = -f(x)$
 - $g(x) = f(-x)$
 - $g(x) = -f(-x)$

Test jednokrotnego wyboru

- Która z podanych funkcji jest rosnąca w przedziale $\langle -2; -\frac{1}{2} \rangle$?
 - $f(x) = \frac{2}{x}$
 - $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$
 - $h(x) = \frac{2-\sqrt{2}}{x}$
 - $k(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{x}$

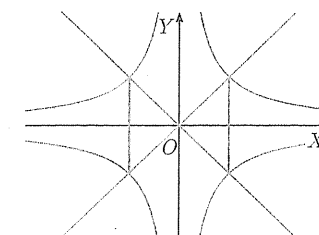
- Punkty $P(x_1, \frac{4}{3}x_1)$ i $Q(-x_1, -\frac{4}{3}x_1)$, gdzie $x_1 > 0$, należą do hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ (rysunek obok). Jeśli $|PQ| = 10$, to:
 - $a = 12$,
 - $a = 10$,
 - $a = 8$,
 - $a = 6$.



- Suma wszystkich wartości parametru b , dla których punkt $P(-3, b^2 + b)$ należy do hiperboli $y = -\frac{6}{x}$, wynosi:
 - -5 ,
 - -3 ,
 - -2 ,
 - -1 .
- Wskaż hiperbolę, która ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu 4.
 - $y = -\frac{16}{x}$
 - $y = -\frac{8}{x}$
 - $y = -\frac{4}{x}$
 - $y = -\frac{2}{x}$

Zestaw II

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 6.
 - $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle \\ 6x & \text{dla } x \in (-1; 1) \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty \rangle \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -\frac{6}{x} & \text{dla } x \in (-2; 0) \cup (0; 2) \end{cases}$
- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \frac{5}{x}$ oraz $g(x) = -f(x)$.
 - Wyznacz osie symetrii figury złożonej z wykresów funkcji f i g .
 - Podaj współrzędne punktów, w których wyznaczone osie symetrii przecinają wykresy funkcji f i g .
- Na rysunku przedstawiono hiperbole $y = \frac{2}{x}$ i $y = -\frac{2}{x}$ oraz proste $y = x$ i $y = -x$. Oblicz pole zacieniowanej figury.
- Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, to hiperbole $y = \frac{a}{x}$ i $y = \frac{b}{x}$ nie mają punktów wspólnych.



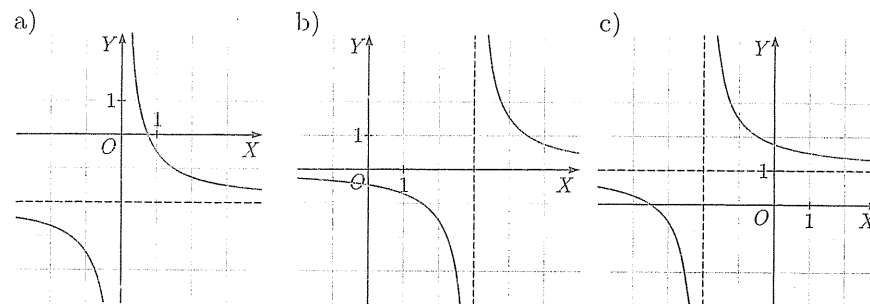
15. Punkty A i B należą do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz a i b . Naszkicuj wykres tej funkcji i odczytaj z niego wartości najmniejszą i największą funkcji f w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od b .
- a) $A(4, b)$, $B(b-1, 3)$
 b) $A(b^2, -2)$, $B(4, b)$
 c) $A(b, 4b)$, $B(-2b, b-6)$
16. Funkcja f każdej wartości parametru m , dla której równanie $x^2 - 6x + m = 0$ ma dwa różne niezerowe pierwiastki, przyporządkowuje sumę odwrotności tych pierwiastków. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Naszkicuj jej wykres.
17. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$ mającego dokładnie dwa punkty wspólne z hiperbolą $y = -\frac{9}{x}$.

2.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

Zestaw I

1. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę i zbiór wartości.
- a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = f(x) - 3$ c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = f(x+1)$
 b) $f(x) = -\frac{4}{x}$, $g(x) = f(x) + 1$ d) $f(x) = -\frac{8}{x}$, $g(x) = f(x-2)$
2. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g i jej przedziały monotoniczności.
- a) $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = f(x-1) - 2$
 b) $f(x) = -\frac{12}{x}$, $g(x) = f(x+4) + 2$
3. Wyznacz równanie hiperboli, wiedząc, że powstała ona w wyniku przesunięcia hiperboli h o pewien wektor, a jej asymptoty przecinają się w punkcie P .
- a) $h: y = \frac{9}{x}$, $P(-1, 3)$ c) $h: y = \frac{5}{4x}$, $P(-4, -2)$
 b) $h: y = -\frac{7}{2x}$, $P(6, 0)$ d) $h: y = -\frac{4}{3x}$, $P(2, -5)$

4. Na rysunku przedstawiono hiperbolę otrzymaną w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{2x}$ o pewien wektor $\vec{u}$. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{u}$, a następnie zapisz równanie tej hiperboli i sprawdź, czy należą do niej punkty $A(\frac{9}{2}, 1)$ i $B(\frac{3}{2}, -1)$.

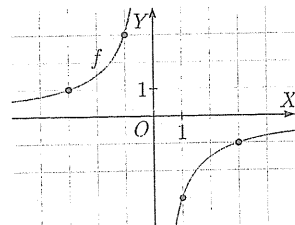


5. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $[p, q]$ otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz a , p i q . Podaj równania asymptot wykresu funkcji g .
- a) $g(x) = \frac{6}{x+2}$ c) $g(x) = \frac{2}{3x-6}$
 b) $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ d) $g(x) = 6 - \frac{10}{5x+2}$
6. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .
- a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x-2} + 7$ c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{12}{4x+16} - 6$
 b) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $g(x) = 1 - \frac{6}{x+4}$ d) $f(x) = -\frac{2}{3x}$, $g(x) = 3 + \frac{4}{6-6x}$
7. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Wyznacz równanie otrzymanej hiperboli i podaj jej asymptoty.
- a) $f(x) = \frac{2}{x+1} - 1$, $\vec{u} = [0, 6]$ c) $f(x) = \frac{11}{x+2} - 6$, $\vec{u} = [-3, 2]$
 b) $f(x) = 2 - \frac{3}{x-1}$, $\vec{u} = [2, 0]$ d) $f(x) = \frac{3}{2x+4} + 5$, $\vec{u} = [-1, -6]$

Test jednokrotnego wyboru

8. Wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x+p^3}$ nie ma punktów wspólnych z prostą $x = 2$. Wynika stąd, że:
- A. $p = -2$, B. $p = \sqrt[3]{-2}$, C. $p = -\sqrt[3]{-2}$, D. $p = 2$.
9. Asymptoty hiperboli $y = \frac{5}{x+c} + d$ przecinają się w punkcie $(4, 2)$. Wskaż punkt, w którym przecinają się asymptoty hiperboli $y = \frac{10}{x+2d} - 2c$.
- A. $(-4, -8)$ B. $(-4, 8)$ C. $(4, 8)$ D. $(4, -8)$

10. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla pewnego a . Ile punktów wspólnych ma on z wykresem funkcji $g(x) = \frac{a}{x-4} + 4$?



- A. 3
B. 2
C. 1
D. 0

11. Iloczyn wszystkich argumentów $x \in \mathbb{C}$, dla których funkcja $f(x) = \frac{4}{x-3}$ przyjmuje wartości całkowite, jest równy:
- A. -64, B. -120, C. -144, D. -280.

Zestaw II

12. Prosta o równaniu $y = x + 3$ przecina pewną hiperbolę w punktach A i B i jest jej osią symetrii. Wyznacz równanie tej hiperboli. Podaj współrzędne jej środka symetrii.
- a) $A(-2, 1), B(0, 3)$ b) $A(-3, 0), B(3, 6)$
13. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$ równoległy do osi OX . Miejscem zerowym funkcji g jest liczba x_0 . Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$ oraz wzór, dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .
- a) $f(x) = \frac{4}{x} - 2, x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{5}{2x} + 5, x_0 = \frac{1}{2}$
14. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji f . Wyznacz a i b .
- a) $f(x) = \frac{5}{x-a} + b, P(-2, 4)$
b) $f(x) = b - \frac{3}{2x-a}, P(1, 0)$
c) $f(x) = \frac{5}{3x-a} + b, P(3, -1)$
15. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{x+2} - 1$. Wyznacz wzór funkcji g i naskicuj jej wykres.
- a) $g(x) = -f(x)$ c) $g(x) = 2 - f(x)$
b) $g(x) = f(-x)$ d) $g(x) = f(2 - x)$
16. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$, gdzie $a \neq 0$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .
- a) $g(x) = f(x+p) - q$ c) $g(x) = q - f(x)$
b) $g(x) = f(p-x)$ d) $g(x) = q - f(p-x)$

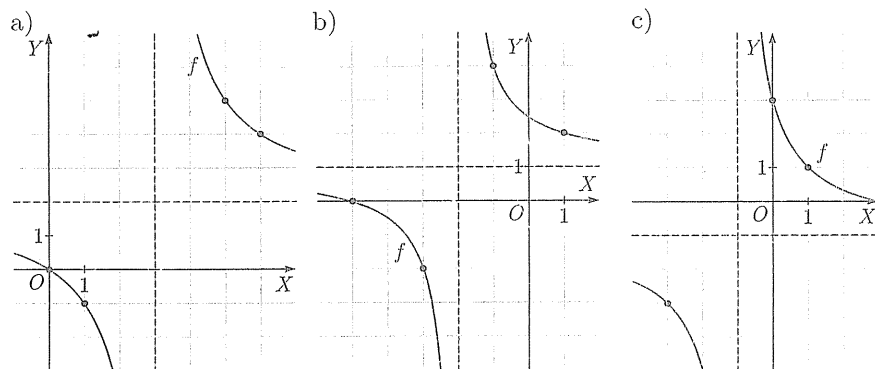
*2.4. Funkcja homograficzna

Zestaw I

1. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$. Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .
2. Uzasadnij, że funkcja f nie jest funkcją homograficzną. Wyznacz jej dziedzinę i zbiór wartości.
- a) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-3}{x-6}$ b) $f(x) = \frac{2-x}{1-\frac{1}{2}}$ c) $f(x) = \frac{4-6x}{9x-6}$
3. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $[p, q]$ otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz a, p i q . Podaj dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g .
- a) $g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ c) $g(x) = \frac{1-4x}{4x+8}$
b) $g(x) = \frac{3x+5}{x-5}$ d) $g(x) = \frac{12-4x}{2x-3}$
4. Naskicuj wykres funkcji f oraz podaj jej dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe. Określ, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.
- a) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{-6-3x}{x+4}$
b) $f(x) = \frac{16+4x}{x+6}$ d) $f(x) = \frac{4x-8}{x-6}$
5. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej i podaj równania asymptot jej wykresu. Określ, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji f .
- a) $f(x) = \frac{-3x-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{6x+3}{3x+1}$
b) $f(x) = \frac{-x}{2x-4}$ d) $f(x) = \frac{8x-1}{4x-3}$
6. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku, dla jakich argumentów funkcje f i g przyjmują te same wartości.
- a) $f(x) = \frac{2x-6}{x+3}, g(x) = \frac{2x}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{2x-4}{x-4}, g(x) = \frac{1-3x}{x+1}$
7. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$. Przedstaw wzór funkcji g w postaci kanonicznej.
- a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = f(x-4) - 3$

8. Wyznacz wartość parametru m , dla której wykres funkcji $f(x) = \frac{m-2x}{4x+8}$ przechodzi przez początek układu współrzędnych. Dla wyznaczonej wartości m naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

9. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x-p}$. Podaj jej miejsce zerowe oraz wyznacz a , b i p .



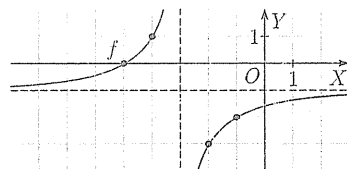
Test jednokrotnego wyboru

10. Funkcja $f(x) = \frac{3x-1}{(a^2-4)x+a^2}$ jest funkcją homograficzną dla:

- A. $a = -2$, B. $a = -1$, C. $a = 1$, D. $a = 4$.

11. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Suma $a + b + c + d$ jest równa:

- A. -2 , C. 2 ,
B. 0 , D. 4 .



12. Asymptotą poziomą wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-3}{2x-3} + \frac{x}{6-4x}$ jest prosta:

- A. $y = \frac{3}{2}$, B. $y = \frac{1}{2}$, C. $y = \frac{1}{4}$, D. $y = -\frac{1}{2}$.

13. Środkiem symetrii pewnej hiperboli jest punkt $(3, -2)$. Jeśli należy do wykresu tej hiperboli punkt $(0, 0)$, to nie należy do niego punkt:

- A. $(-3, -1)$, B. $(2, 6)$, C. $(5, -5)$, D. $(9, -3)$.

Zestaw II

14. Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x-p}$ nie ma punktów wspólnych z prostą $y = -4$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$. Wyznacz a , b i p , jeśli funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -2)$ oraz $(-2; \infty)$.

15. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f nie jest funkcją homograficzną? Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f dla wyznaczonej wartości parametru k .

- a) $f(x) = \frac{-3x}{kx+2}$ b) $f(x) = \frac{4x+k}{6x-4}$ c) $f(x) = \frac{kx-3}{2x+1}$

16. Dana jest funkcja homograficzna f z parametrem k . Wyznacz wartości, jakie może przyjmować ten parametr. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Wyznacz środek symetrii jej wykresu i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = \frac{x+k}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{6-2x}{x+k}$ c) $f(x) = \frac{kx-12}{x-3}$

17. Wykaż, że równanie $xy = 2x + 3y$ jest spełnione przez osiem różnych par liczb całkowitych (x, y) .

18. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{kx+k-1}{x+k}$.

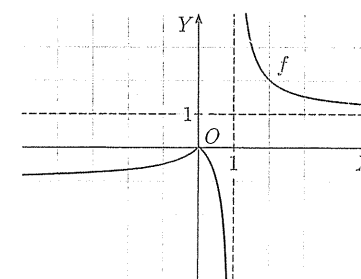
- a) Uzasadnij, że dla dowolnej wartości parametru k jest to funkcja homograficzna. Wyznacz współrzędne środka symetrii wykresu funkcji f .
b) Naszkicuj wykres funkcji f dla $k = -1$ i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

*2.5. Przekształcenia wykresu funkcji

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{|x|}{x-1}$. Wyznacz wzór funkcji g oraz podaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Opisz przekształcenie, w wyniku którego z wykresu funkcji f można otrzymać wykres funkcji g .

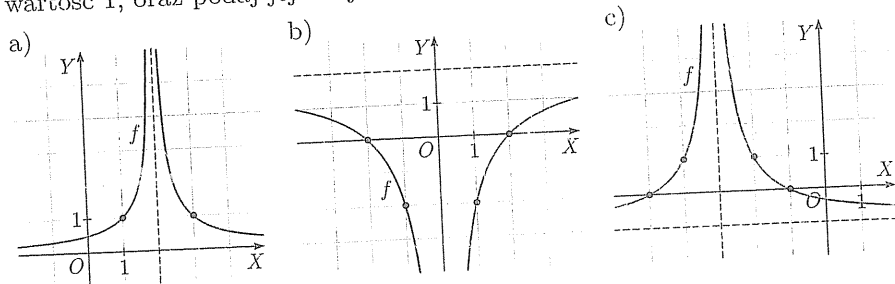
- a) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = |f(x)|$
b) $g(x) = 1 - f(x)$ d) $g(x) = f(|x|)$



2. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Wyznacz wzór funkcji g i naskicuj jej wykres. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g .

a) $f(x) = \frac{4}{|x|}$, $\vec{u} = [1, -2]$ c) $f(x) = -\frac{6}{|x|}$, $\vec{u} = [-3, 2]$
 b) $f(x) = -\frac{4}{|x|}$, $\vec{u} = [0, 4]$ d) $f(x) = \frac{1}{2|x|}$, $\vec{u} = [-1, -4]$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{|x-p|} + q$. Wyznacz a , p i q . Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 1, oraz podaj jej miejsca zerowe, jeśli istnieją.



4. Naskicuj wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .

a) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ c) $f(x) = -\frac{4}{x-2} - 2$
 b) $f(x) = \frac{4}{x+2}$ d) $f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$

5. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$ oraz $h(x) = -g(x)$. Dla ilu argumentów funkcja g przyjmuje wartość 2? Podaj liczbę rozwiązań równania $h(x) = -3$.

a) $f(x) = 2 - \frac{4}{x}$ c) $f(x) = \frac{2}{x-1} - 2$
 b) $f(x) = \frac{3}{x} - 3$ d) $f(x) = -\frac{1}{x+4} - 3$

6. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności. Dla jakich wartości parametru m prosta $y = m$ ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f ?

a) $f(x) = \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$ c) $f(x) = 2 \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$
 b) $f(x) = -\left| \frac{3-3x}{x-3} \right|$ d) $f(x) = \frac{-4|x+1|}{|x+4|}$

7. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{4}{|x|-2} \right|$. Odczytaj z niego, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma co najmniej trzy rozwiązania.

8. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

a) $f(x) = -\frac{6}{|x|-2}$ c) $f(x) = \frac{5}{|x|+1} + 2$
 b) $f(x) = \frac{3}{|x|-1} - 1$ d) $f(x) = 3 - \frac{12}{|x|+3}$

Test jednokrotnego wyboru

9. Wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{4}{|x|} - 4 \right|$ ma cztery punkty wspólne z prostą:

A. $y = -4$, B. $y = 0$, C. $y = 2$, D. $y = 4$.

10. Zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{6}{|x|-2}$ jest sumą przedziału $(0; \infty)$ i przedziału:

A. $(-\infty; -6]$, B. $(-\infty; -3]$, C. $(-\infty; -2]$, D. $(-\infty; -1]$.

11. Punkt $P(-2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{|x|+4}$. Do wykresu tej funkcji należy również punkt:

A. $(20, \frac{1}{2})$, B. $(18, \frac{1}{2})$, C. $(16, \frac{1}{2})$, D. $(12, \frac{1}{2})$.

12. Prosta $y = m$ ma z wykresem funkcji $f(x) = \left| \frac{3x-5}{x-1} \right|$ dokładnie jeden punkt wspólny dla:

A. $m \in \{0, 1\}$, B. $m \in \{0, \frac{5}{3}\}$, C. $m \in \{0, 3\}$, D. $m \in \{0, 5\}$.

Zestaw II

13. Wyznacz wzór funkcji g , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej k . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g .

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $k: y = 0$ c) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$, $k: y = 3$
 b) $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$, $k: x = -1$ d) $f(x) = \frac{6-2x}{x-4}$, $k: x = 0$

14. Naskicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą tej funkcji.

a) $f(x) = \left| 3 - \frac{6}{\sqrt{x^2+4x+4}} \right|$, $D = \langle -1; 4 \rangle$
 b) $f(x) = 4 - \left| \frac{6}{x} + 2 \right|$, $D = \langle -6; -2 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$

15. Funkcja $y = p(m)$ określa liczbę rozwiązań równania $\left| \frac{2-3x}{x+1} \right| = 2m - 1$ w zależności od wartości parametru m . Wyznacz $p(3)$ i $p(0)$. Dla jakich wartości parametru m funkcja p przyjmuje wartość 1?

16. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki dodatnie?

a) $f(x) = \frac{2|x-2|}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{|x-1|-|x-3|}{x-2}$

17. Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej m równanie $|\frac{x}{x-2}| = m$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Zestaw I

1. Uzasadnij, że podane wyrażenie jest wyrażeniem wymiernym i podaj jego dziedzinę. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $x = -2$.

a) $\frac{\sqrt{2+x}}{x^2-2}$ c) $\frac{\sqrt{x^4+6x^2+9}}{x^3+1}$
b) $\sqrt{4x^4+4x^2+1}$ d) $\frac{\sqrt{4x^4+12x^2+9}}{\sqrt{x^4+2x^2+1}}$

2. Oblicz wartości wyrażenia dla tych spośród liczb: $-2, 0, 1, \sqrt{2}$, dla których jest to możliwe.

a) $\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}$ c) $\frac{3x^3-2x+1}{x(x+2)(x-1)}$
b) $\frac{4x-4}{3(x+2)^2(x+1)}$ d) $\frac{2x-1}{x^4-2x^2+1}$

3. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{x^2-7x+1}{x^3+7x^2}$ c) $\frac{12x^4}{x^4-4x^2+4}$
b) $\frac{8x^6-9x^5}{x^3+x^2-2x}$ d) $\frac{3x^2-5}{3x^3-2x^2+x}$

4. Podaj przykład wyrażenia wymiernego, którego dziedziną jest zbiór D i którego wartość dla $x = 1$ jest równa -2 .

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 3\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

5. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{2(x+2)^3(x-5)}{(2x+4)^2(x-5)^3}$ c) $\frac{x^3-2x^2}{x^4-4x^2}$ e) $\frac{6x-8}{9x^2-24x+16}$
b) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ d) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-4x^2+3x}$ f) $\frac{3x^2+3x}{2x^3+x^2-x}$

6. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{4x^2+4x}{x^3+1}$ b) $\frac{2x^2+6x+18}{27x-x^4}$ c) $\frac{x^3-8x^2+x-8}{x^3-8x^2-x+8}$

7. Ustal, dla jakich x podana równość jest prawdziwa.

a) $\frac{(x+4)^4(x-3)^5}{(x+4)^5(x-3)^4} = \frac{(x-3)}{(x+4)}$
b) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{x+2}{x-3}$
c) $\frac{x^3+x^2-(x+1)}{x^4-2x^2+1} = \frac{1}{x-1}$

8. Wykonaj mnożenie.

a) $\frac{5x-7}{4x^2-6x} \cdot 4x$ d) $\frac{15x^2}{(3x-1)^2} \cdot \frac{6x-2}{3x}$
b) $\frac{x+1}{x^3-2x^2+x} \cdot (x^2-1)$ e) $\frac{6x^2}{4x^2-9} \cdot \frac{2x+3}{3x^2-9x}$
c) $\frac{3x-2}{16x^2+8x+1} \cdot (16x^2-1)$ f) $\frac{1-6x+9x^2}{x^2-3x} \cdot \frac{x^2-9}{9x^2-1}$

9. Wykonaj mnożenie.

a) $\frac{4x^2-4x+1}{8x^3+1} \cdot \frac{(2x+1)^2}{4x^2-1}$ d) $\frac{x^2+4}{x^2-2x+4} \cdot \frac{x^3+8}{x^4-16}$
b) $\frac{x-2}{x^3-9x} \cdot \frac{x^3+5x^2+6x}{x+2}$ e) $(3x^2-4x-4) \cdot \frac{x+2}{8+27x^3}$
c) $\frac{3x^2-x-2}{9x^2-4} \cdot \frac{9x^2-12x+4}{9x^2-9}$ f) $\frac{x^3-7x^2+14x-8}{25x^2-1} \cdot \frac{10x^2+2x}{x^2-3x+2}$

10. Wykonaj dzielenie.

a) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)(x+2)} : \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x+2)}$ d) $\frac{x^2+x-2}{x-3} : \frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$
b) $\frac{3x^3-12x}{3x-4} : (x^2+2x)$ e) $\frac{4x^2-81}{3x^2-3} : \frac{4x+18}{x+1}$
c) $(3x^2-2x) : \frac{9x^2-4}{9x-4}$ f) $\frac{x^4-81}{(2x-6)^2} : \frac{3x^3+27x}{4x+12}$

11. Wykonaj działania.

a) $\frac{4x^2-1}{6x-30} : \frac{3x+15}{4x-2} \cdot \frac{x^2-25}{2x+1}$ b) $\frac{25x-x^3}{6x-30} : \frac{x+5}{x+3} : \frac{x}{x-3}$

Test jednokrotnego wyboru

12. Dla $x = \sqrt{3} - 2$ wartość wyrażenia $\frac{(16x^2-9)^2}{(16x^2+24x+9)(16x^2-24x+9)}$ jest równa:

A. $2 + \sqrt{3}$, B. $2\sqrt{3}$, C. $\sqrt{3}$, D. 1.

13. Wskaż przedział zawarty w dziedzinie wyrażenia $\frac{(x^2-16)(25-x^2)}{(x^2-8)(8x^2-1)}$.

A. $\langle -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2} \rangle$ B. $\langle -\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} \rangle$ C. $\langle -\frac{1}{2}; 0 \rangle$ D. $\langle 0; \frac{3}{2} \rangle$

14. Dla której z liczb: $-5, -4, -3, -2$ wyrażenie $\frac{(x+8)(x^4+x^3)(x-1)}{(x^2-x)(x^2+x)}$ przyjmuje najmniejszą wartość?

A. -5 B. -4 C. -3 D. -2

Zestaw II

15. Dla jakich wartości parametru m dziedziną podanego wyrażenia jest zbiór liczb rzeczywistych?

a) $\frac{3x^2-2x+1}{mx^2-2x+6}$ b) $\frac{4x^3-5x^7}{x^2-2mx+9}$ c) $\frac{5x^5-4x^4+6}{(x^2+m)(x^2+3mx+1)}$

16. Wykonaj mnożenie.

a) $\frac{x^4-16}{2x^3} \cdot \frac{4x^2-16}{x^3+2x^2+4x+8} \cdot \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$ c) $\frac{3(x^2-4)}{x^2-4x+1} \cdot \frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{2x}{3(x-1)^2}$
 b) $\frac{25x^2+20x+4}{5x^3} \cdot \frac{2x+5}{25x^2-4} \cdot \frac{10x^2-4x}{4x^2+20x+25}$ d) $\frac{3x-2}{x^2+x-6} \cdot \frac{3x^2+11x+6}{9x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{9x-6}$

17. Uprość podane wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $x = \frac{1}{2}$.

$$\frac{(2x-5)^2}{x^2-2x+1} \cdot (2x^3 + 5x^2 - 2x - 5) / (4x^3 + 4x^2 - 25x - 25)$$

18. Wyznacz dziedziny funkcji f i g oraz funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ i $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
 Podaj wzory funkcji h i k w najprostszej postaci.

a) $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2-5x-6}$, $g(x) = \frac{x^2+6x+5}{x^2-9x+18}$
 b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-2x}$, $g(x) = \frac{x^3-4x}{x^5+8x^2}$
 c) $f(x) = \frac{2x^3-3x^2}{2x+3}$, $g(x) = \frac{x^2}{4x^2-9}$
 d) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-4x+8}{2x^2+x}$, $g(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2+5x+2}$

19. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{5x+y}{125x^3+y^3}$ c) $\frac{4x-6xy}{9x^2y^2-6x^2y}$
 b) $\frac{x^4-y^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}$ d) $\frac{(xy+y)(xy^2-x^2y)}{(xy+x)(x^2y-xy^2)}$

20. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $x = -6$ i $y = -2$.

a) $\frac{(x^2-2xy)(x-5y)+(x-2y)(3x^2+xy)}{x^3-xy^2}$ b) $\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x^2+2x+1-y^2}$

21. Wykonaj działanie.

a) $\frac{xy}{xy-y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{xy^2+x^2y}$ c) $\frac{2y^2-4xy+2x^2}{3x+3y} : \frac{2y^2-2x^2}{x^2+2xy+y^2}$
 b) $\frac{3x^2-3xy+3y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{4x^3+4y^3}$ d) $\frac{x^2+3xy}{xy^2} : \frac{x^2y-9x^3}{x^2y}$

22. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y , gdzie $x \neq y$, zachodzi równość:

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2} : (x-y) = \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$$

2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Zestaw I

1. Sprowadź podane wyrażenia wymierne do wspólnego mianownika.

a) $\frac{5x}{x+5}$, $\frac{x}{x-5}$ d) $\frac{3}{x^2-2x}$, $\frac{6}{x-2}$ g) $\frac{x+1}{x-3}$, $\frac{3x-1}{x+3}$, $\frac{4}{x^2-9}$
 b) $\frac{3x+4}{2x-4}$, $\frac{7x-5}{6-3x}$ e) $\frac{x^2+3}{x^2-6x+9}$, $\frac{3x}{x+3}$ h) $\frac{x+1}{x^2-2x+1}$, $\frac{4}{x^2-1}$, $\frac{x-1}{x^2+2x+1}$
 c) $\frac{x-7}{6x+4}$, $\frac{2x+4}{9x+6}$ f) $\frac{2x+1}{x^4-16}$, $\frac{4}{x+2}$ i) $\frac{2}{x^2-3x+2}$, $\frac{1}{x^2-4x+4}$, $\frac{6}{x^2-4}$

2. Wykonaj działania.

a) $2x + \frac{1}{x+2}$ d) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$ g) $\frac{4x+1}{4x-8} - \frac{x+1}{x+2}$
 b) $3 - \frac{2x+1}{x-1}$ e) $\frac{4}{x+5} - \frac{3}{x-1}$ h) $\frac{6x+5}{1-2x} + \frac{3x}{x+3}$
 c) $\frac{x^2+3}{x-3} - x$ f) $\frac{3x}{x+2} - \frac{3x}{x-2}$ i) $\frac{3x-4}{2x} + \frac{2-5x}{5x+2}$

3. Wykonaj działania.

a) $\frac{3}{x-2} + \frac{6}{4-2x} + \frac{1}{3x-6}$ c) $2 - \frac{2x}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2}$
 b) $\frac{x+1}{2x-1} + \frac{3}{4-8x} + \frac{x-1}{1-2x}$ d) $x - \frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2}$

4. Wykonaj działania.

a) $x + 2 + \frac{x^2-3x}{2-x}$ d) $\frac{2x+3}{x-3} + \frac{x-2x^2}{x^2-4x+3}$
 b) $2x - 3 + \frac{2x-5x^2}{3x+2}$ e) $\frac{2-x}{x^2+4x} + \frac{2+x}{x^2-4x}$
 c) $\frac{2-x^2}{2x+10} - \frac{x+4}{x^2+5x}$ f) $\frac{2x+1}{x^2-4x+4} - \frac{x-1}{x^2-4}$

5. Wykonaj działania.

a) $\frac{x+6}{x^2+x-2} + \frac{3x+8}{2x+4} + \frac{x+1}{1-x}$ c) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{6}{x^2+6x+9} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$
 b) $\frac{2x+13}{x^2-4} + \frac{x+4}{x+2} - \frac{x+2}{x-2}$ d) $\frac{6-9x}{x^3+8} + \frac{2x+3}{x^2-2x+4} - \frac{1}{x+2}$

Test jednokrotnego wyboru

6. Wartość wyrażenia $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1}$ dla $x = \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{4}}$ jest równa:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, C. 0, D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Wyrażenie $\frac{x}{x+2} + \frac{4x}{x^2+4} - \frac{x}{x-2}$ zapisano w postaci $\frac{ax}{x^4+c}$, gdzie $a, c \in \mathbb{R}$. Iloczyn ac jest równy:

A. 2^4 , B. 2^6 , C. 2^9 , D. 2^{10} .

Zestaw II

8. Wykonaj działania.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot (x^2 - 1) & \text{c)} \left(\frac{x^2+4x}{x^2-9} - \frac{x+4}{x-3} \right) \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+4} \\ \text{b)} \left(\frac{2x-3}{x+1} - \frac{2x+3}{x} \right) \cdot \frac{x^2+x}{4x^2-9} & \text{d)} \left(\frac{x-2}{x+4} - \frac{x+2}{x-4} \right) \cdot \frac{x^2-16}{x^2-4} \end{array}$$

9. Wyznacz a i b , wiedząc, że podana równość jest prawdziwa dla wszystkich wartości zmiennej x , dla których występujące w tej równości wyrażenia mają sens.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x-5}{x^2-x-6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} & \text{c)} \frac{4x-6}{x^2+6x} = \frac{a}{x+6} + \frac{b}{x} \\ \text{b)} \frac{6}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} & \text{d)} \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} - \frac{2}{x} \end{array}$$

10. Uzasadnij, że podana równość jest prawdziwa dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{a)} \frac{(x+2)^2}{x^2+4} = 2 - \frac{(x-2)^2}{x^2+4} \quad \text{b)} \left(1 + \frac{x^2(x^2-1)}{x^2+1} \right) : \left(x^2 - \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) = 1$$

11. Wykaż, że równość $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$. Korzystając z tej równości, oblicz wartość wyrażenia:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \\ \text{b)} \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}, \\ \text{c)} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}. \end{array}$$

2.8. Równania wymierne

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4x+3}{2x-5} = 4 & \text{d)} \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+2} & \text{g)} \frac{2x-5}{2x+1} = \frac{x-1}{x+3} \\ \text{b)} \frac{2x-3}{2x+3} = 1 & \text{e)} \frac{5}{2x-4} = \frac{6}{3x+5} & \text{h)} \frac{x+4}{2x} = \frac{x+4}{x-4} \\ \text{c)} \frac{8x-6}{12-16x} = \frac{1}{2} & \text{f)} \frac{4-x}{x+1} = \frac{10-3x}{x+4} & \text{i)} \frac{5x}{5x-2} = \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3 + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+2}{x} & \text{c)} \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-2} & \text{e)} \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} + 2 \\ \text{b)} \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 2 & \text{d)} \frac{13}{x-1} = \frac{3}{x+3} - 4 & \text{f)} \frac{7}{x+1} + \frac{3}{x} = \frac{6}{x-2} \end{array}$$

3. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x+4}{x+2} = \frac{x^2-x-11}{x^2-4} + \frac{x+1}{x-2} & \text{d)} \frac{3}{x} + \frac{2}{x-3} = \frac{21}{x^2-3x} \\ \text{b)} \frac{3}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{7}{x^2-9} & \text{e)} \frac{x+5}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2-2x+1} \\ \text{c)} \frac{x-2}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x^2-4x} & \text{f)} \frac{3x-1}{3x+1} = \frac{12}{9x^2-1} + \frac{3x+1}{3x-1} \end{array}$$

4. Dla jakich wartości parametru m funkcja f spełnia podane warunki?

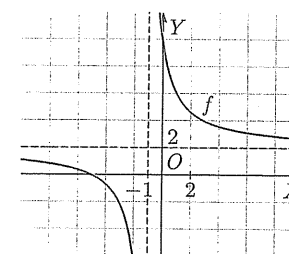
$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \frac{3x+m}{x-m}, f(2) = 7 & \text{d)} f(x) = \frac{2x^2-m^2x}{2m-x^2}, f(2) = 0 \\ \text{b)} f(x) = \frac{mx-4}{mx+2}, f(1) = -1 & \text{e)} f(x) = \frac{14}{x^2-m^2} - \frac{1}{x-m}, f(4) = 1 \\ \text{c)} f(x) = \frac{3-2mx}{mx+5} + 2, f(-2) = 16 & \text{f)} f(x) = \frac{x-9}{x+m} + \frac{x+11}{x^2-m^2}, f(4) = 0 \end{array}$$

5. Wyznacz graficznie i algebraicznie współrzędne punktów wspólnych hiperboli i prostej.

$$\text{a)} y = \frac{8}{x+3}, y = x + 1 \quad \text{b)} y = \frac{x+5}{x+2}, y = 3x + 7$$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ z zaznaczonymi asymptotami. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{l} \text{a)} f(x) = 3 \\ \text{b)} f(x) = 2x - 2 \\ \text{c)} f(x) = 2 + \frac{4}{x-1} \end{array}$$



Test jednokrotnego wyboru

7. Obydwa rozwiązania równania $\frac{6x-35}{x+18} = x$ należą do przedziału:

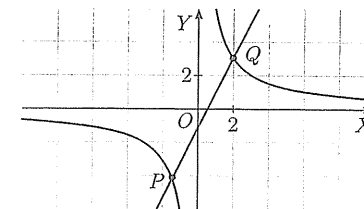
$$\text{A. } (-12; -7), \quad \text{B. } (-8; -4), \quad \text{C. } (-5; -2), \quad \text{D. } (0; 8).$$

8. Wskaż równanie sprzeczne.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x + 2 = \frac{1}{x} & \text{C. } x + 1 = \frac{2}{x} \\ \text{B. } x + 2 = -\frac{1}{x} & \text{D. } x + 1 = -\frac{2}{x} \end{array}$$

9. Prosta $y = 2x - 1$ przecina hiperbolę $y = \frac{6}{x}$ w punktach P i Q (rysunek obok). Długość odcinka PQ jest równa:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{6\sqrt{5}}{2}, & \text{C. } \frac{8\sqrt{5}}{2}, \\ \text{B. } \frac{7\sqrt{5}}{2}, & \text{D. } \frac{9\sqrt{5}}{2}. \end{array}$$



10. Równanie $\frac{x}{x+1} = x + m$ ma dwa rozwiązania dla:

- A. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$,
 B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
 C. $m \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$,
 D. $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$.

Zestaw II

11. Ustal, dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$ oraz $g(x) = x + m$ mają dwa punkty wspólne.

12. Ustal, dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \frac{4+mx}{x}$ oraz $g(x) = 1 - x$ mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

13. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 4 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{1}{y} = -1 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

14. Wyznacz graficznie i algebraicznie współrzędne punktów wspólnych okręgu $x^2 + y^2 = 25$ i hiperboli $y = \frac{12}{x}$.

15. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $m \neq 0$ równanie:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{m}$$

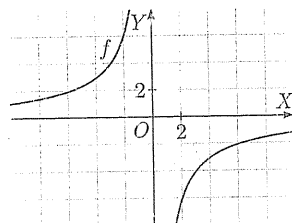
ma dwa różne pierwiastki.

*2.9. Nierówności wymierne

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{12}{x}$. Odczytaj z niego zbiór rozwiązań podanej nierówności.

- a) $-\frac{12}{x} \geq 4$
 b) $-\frac{12}{x} \leq 6$
 c) $\frac{12}{x} \leq 2$
 d) $3 \leq \frac{12}{x} \leq 6$



2. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{3}{2x} \leq 0$
 b) $\frac{4}{x} \geq 1$
 c) $\frac{6}{x} > -2$
 d) $-\frac{5}{2x} > -3$
 e) $-\frac{4}{3x} \geq 1$
 f) $-\frac{4}{3x} \leq 2$

3. Rozwiąż graficznie i algebraicznie podaną nierówność. Ile liczb naturalnych należy do zbioru rozwiązań tej nierówności?

- a) $\frac{6}{x-2} \geq 1$
 b) $\frac{3}{x-4} \leq -1$
 c) $\frac{8}{x-3} \leq -1$
 d) $\frac{9-x}{x} \geq 2$
 e) $\frac{2x}{x+4} > 1$
 f) $\frac{x+3}{x-4} \leq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{x(x-3)}{x+2} > 0$
 b) $\frac{(x+5)(2-x)}{x^2-2x+4} \leq 0$
 c) $\frac{(x+4)(1-x)}{(2x+6)^2} \geq 0$
 d) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9} < 0$
 e) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} < 0$
 f) $\frac{x^4-x^2}{x^2-2x+1} \geq 0$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{7}{x} \leq \frac{3}{x+4}$
 b) $-\frac{4}{2x+1} > \frac{2}{x-2}$
 c) $\frac{x+1}{x-1} \geq 1 + \frac{3}{x}$
 d) $\frac{14}{x} - \frac{x+7}{x+8} \leq -2$
 e) $\frac{14}{x^2-9} < \frac{1}{x-3} + 1$
 f) $\frac{2x^2-4}{x^2-4} > \frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2}$

6. Sprawdź, czy przedział $\langle 1; 3 \rangle$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności.

- a) $\frac{x^2-x}{4x-x^2} \geq 0$
 b) $\frac{x^2-6x}{x^2+2x} > 0$
 c) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-16} \leq 0$
 d) $\frac{x^2+4}{2x^2+5x-3} < 0$
 e) $\frac{x^2-2x+4}{2x+5} < 2$
 f) $\frac{2x}{x^2-16} \geq \frac{1}{x+4}$

7. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leq g(x)$.

- a) $f(x) = \frac{4}{x-1}$, $g(x) = x - 1$
 b) $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$, $g(x) = \frac{3x-1}{x}$

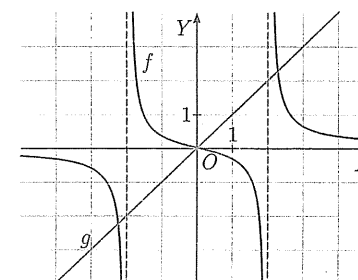
Test jednokrotnego wyboru

8. W zbiorze rozwiązań nierówności $\frac{1}{(x+2)^3} < \frac{1}{x+2}$ zawarty jest przedział:

- A. $(-5; -4)$,
 B. $(-4; -3)$,
 C. $(-3; -2)$,
 D. $(-2; -1)$.

9. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ i $g(x) = x$. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \cdot g(x) < 0$.

- A. $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$
 B. $(-2; 0) \cup (0; 2)$
 C. $(-2; 0) \cup (2; \infty)$
 D. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$



10. Z równania $3x + 2y + xy - 6 = 0$ wyznaczono y jako funkcję zmiennej x . Dla ilu argumentów całkowitych funkcja ta przyjmuje wartości nieujemne?

- A. dla 2
 B. dla 3
 C. dla 4
 D. dla 5

Zestaw II

11. Niech $f(x) = 2 - \frac{3}{x}$. Rozwiąż nierówność.
- a) $f(x-1) > f(2x-1)$ b) $f(x-1) - f(x+1) \leq 2$
12. Ustal, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \left| \frac{x^2-3x-1}{x^2+2x} \right|$ spełnia warunek $f(x) \in \langle 0; 1 \rangle$.
13. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) , których współrzędne spełniają dwa warunki: $\frac{x^2+11x+4}{x} < x+2$ i $\frac{-y-1}{y} > \frac{1}{-y-4}$.
14. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność podwójna jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x ?
- a) $-1 < \frac{x^2+(m-2)x+1-m}{x^2-3x+4} < 2$ b) $-3 < \frac{x^2+(m+2)x+m-1}{x^2+x+1} < 2$
15. Wykaż, że nierówność: $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{x-2}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste $x \neq 2$.

*2.10. Funkcje wymierne

Zestaw I

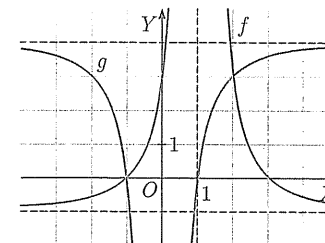
1. Podaj dziedzinę funkcji f , uprość jej wzór i oblicz $f(-2)$, $f(0)$ i $f(2)$, jeśli to możliwe.
- a) $f(x) = \frac{x^2(3x+1)}{9x^3-x}$ c) $f(x) = \frac{4x^3+4x^2-x-1}{x^3+x^2}$
- b) $f(x) = \frac{x^3+x^2-20x}{x^2+10x+25}$ d) $f(x) = \frac{x^4+4x^2+4}{x^3-2x^2+2x-4}$
2. Zbadaj, czy funkcje f i g są równe.
- a) $f(x) = \frac{x^2+9}{x^4-81}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-9}$
- b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
- c) $f(x) = \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x(x-1)}{x^2-1}$
- d) $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x+2}$, $g(x) = \frac{3}{(x+1)(x+2)}$

3. Wyznacz dziedzinę funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Uprość wzór tej funkcji i podaj jej miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{x+2}{x^2-25}$
- b) $f(x) = \frac{x}{x-3} - \frac{4}{x^2-9}$, $g(x) = \frac{x^2-3x}{x+3}$
- c) $f(x) = \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+2}$, $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x}$
- d) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^3+x^2-9x-9}$, $g(x) = \frac{x^4-18x^2+81}{x^2+8x+16}$

4. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} - 1$ i $g(x) = \frac{4x^2-4}{x^2}$. Odczytaj z wykresów, dla jakich argumentów:

- a) $f(x) = 3$,
b) $g(x) \leq 0$,
c) $f(x) - g(x) \leq 0$.

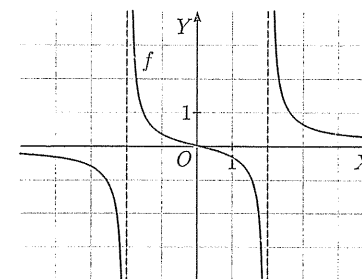


Test jednokrotnego wyboru

5. Która z podanych funkcji jest równa funkcji $g(x) = x+1$?
- A. $f_1(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$ C. $f_3(x) = \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2+1}$
- B. $f_2(x) = \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+x}$ D. $f_4(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $(x^2+2x) \cdot f(|x|) < 0$.

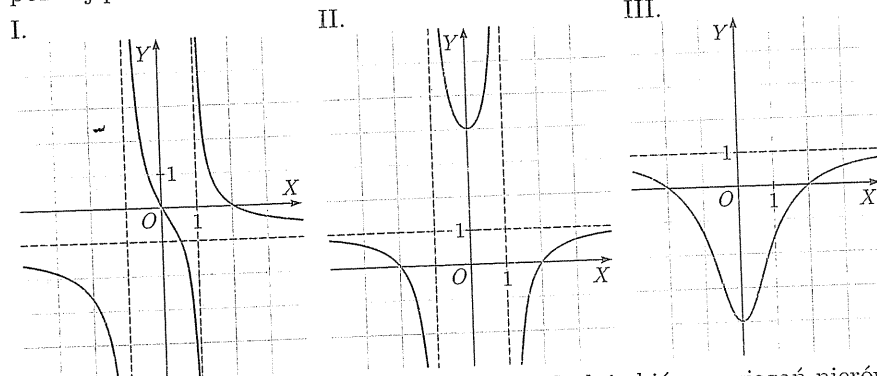
- A. $(-2; 0)$
B. $(0; 2)$
C. $(-2; 0) \cup (0; 2)$
D. $(-2; 0) \cup (2; \infty)$



7. Ile wspólnych miejsc zerowych mają funkcje $f(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-1)(x-3)^2}{x+3}$ i $g(x) = \frac{(x-4)^2(x^2-3)(x+1)^2}{x+4}$?
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zestaw II

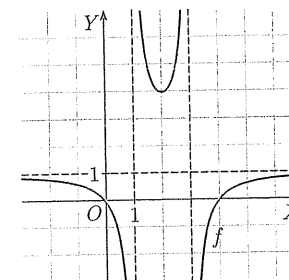
8. Dane są funkcje: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$, $h(x) = \frac{2x-x^2}{x^2-1}$. Na rysunkach poniżej przedstawiono ich wykresy.



Dopasuj do każdej z tych funkcji jej wykres. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

- a) $f(x) \leq 0$, b) $g(x) \cdot h(x) \geq 0$, c) $\frac{h(x)}{f(x)} \geq 0$.
9. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{x^2+(m+1)x+m}{x^2-9}$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe?
10. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{x^2+(m+2)x+m+2}{x^2-2x+m}$ ma dwa różne miejsca zerowe, a jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych?
11. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcje f i g są równe?
- a) $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+4x-5}$
 b) $f(x) = \frac{1}{x-a}$, $g(x) = \frac{x^2+b}{x^3+x^2+x+1}$
 c) $f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-8}{x^2-x-6}$
 d) $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x+4}$, $g(x) = \frac{x^2+3x-12}{x^2+4x}$
12. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{(|x|-2)x}$. Wyznacz jej wartości najmniejszą i największą w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$.



- a) Podaj dziedziny i zbiory wartości funkcji $g(x) = f(x+2) - 2$ i $h(x) = f(|x|)$.
 b) Ile rozwiązań ma równanie $|f(x)| = 4$?
 c) Dla jakich wartości parametru m równanie $|f(x)| = \frac{2m}{m-1}$ ma dwa rozwiązania?

14. Wykaż, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ jest przedział $\langle -1; 1 \rangle$.

*2.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{|x+2|} = 1$

b) $\frac{3}{|2x-1|} = 4$

c) $\frac{1}{|3-4x|} = \frac{2}{|x+2|}$

d) $\frac{3}{|x-3|} = \frac{6}{|2x+3|}$

e) $\left| \frac{7x-6}{2x-1} \right| = 4$

f) $\left| \frac{5-x}{2x+1} \right| = 1$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{|x|+1} = 1$

b) $\frac{2}{|x+1|-1} = 3$

c) $\frac{8}{|x-2|} = x$

d) $\frac{1}{|x-1|} = x - 1$

e) $\frac{2 \cdot |x|}{x+4} = 3$

f) $\frac{x+1}{|x-2|} = x$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{|2x-3|} > 1$

b) $\frac{5}{|2-x|} \geq 0$

c) $\frac{2}{|x+5|} < \frac{1}{3}$

d) $\frac{6}{|5x+4|} \leq \frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{|x-3|} - 3 \leq \frac{3}{|6-2x|} - 2$

f) $\frac{1}{|6-4x|} - \frac{1}{|6x-9|} \geq \frac{1}{6}$

4. Uzasadnij, że podana nierówność jest sprzeczna.

a) $\frac{5}{|x-3|} + 2 \leq \frac{3}{|x-3|} + 1$ b) $\frac{|x+3|}{|x^2+x-6|} \leq 0$ c) $\frac{3}{2+|x|} \geq 2$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\left| \frac{x+4}{2-x} \right| \leq 4$ c) $\left| \frac{2x+1}{x-3} \right| < 1$ e) $\left| \frac{x^2-4}{2x+6} \right| > 0$
 b) $\left| \frac{2x-9}{x+2} \right| \leq 0$ d) $\frac{2}{|x-1|} \geq \frac{3}{|x+2|}$ f) $\frac{4}{|x+4|} \leq \frac{5}{|x-3|}$

Test jednokrotnego wyboru

6. Które z podanych równań jest spełnione przez co najmniej jedną liczbę całkowitą?

A. $\frac{5}{|4x+2|} = 2$ B. $\frac{4}{|5x-2|} = 1$ C. $\frac{3}{|2x-1|} = 2$ D. $\frac{2}{|3x+1|} = 1$

7. Oznaczmy przez X zbiór rozwiązań nierówności $\left| \frac{x}{x-4} \right| \leq 1$. Wówczas zbiór $X \cap \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$ jest równy:

A. $\langle -\sqrt{5}; 1 \rangle$, B. $\langle -\sqrt{5}; 2 \rangle$, C. $\langle -2; \sqrt{5} \rangle$, D. $\langle -1; \sqrt{5} \rangle$.

8. Ile liczb naturalnych mniejszych od 10 spełnia nierówność $\frac{2}{|x+2|} < \frac{1}{|0,5x-4|}$?

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Zestaw II

9. Zaznacz na osi liczbowej zbiór $A \cap B$.

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{|x-1|} \leq 0 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x+4|}{x} \geq 2 \right\}$
 b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq \frac{6}{x} \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 2 - \frac{6}{|x|} \right| \leq 1 \right\}$

10. Rozwiąż graficznie podwójną nierówność.

a) $-3 \leq \frac{|x|}{x-4} \leq 3$ b) $-3 \leq \frac{2|x|+1}{x} \leq 3$ c) $-3 \leq \frac{3x-6}{|x|} \leq 3$

11. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2}{x-2} \leq \frac{x+1}{|x+1|}$ b) $x \leq \frac{|x+1|}{x-1} - 2$ c) $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| + x \geq -1$

12. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1-x}{|1-x^3|} \leq 1$ b) $\frac{x^2-4|x|+4}{x^2+5x+6} > 0$ c) $\frac{x^2+2x}{|x|-2} > x+1$

13. Rozwiąż równanie graficznie i algebraicznie.

a) $\frac{|x|+3}{|x|-3} = 3$ b) $\frac{3|x|-2}{|x|-1} = 4$ c) $\frac{3|x|+1}{|x|+1} = 2$

14. Podaj liczbę rozwiązań równania $\frac{4}{|x+2|-2} = mx$ w zależności od wartości parametru m .

15. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - mx - m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 2$?

16. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left| \frac{4}{|x+2|} - 1 \right| = m$ ma dwa pierwiastki należące do przedziału $\langle -3; -1 \rangle$?

2.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Zestaw I

1. Liczbę $\frac{4}{11}$ zapisano w postaci ułamka skracalnego, którego mianownik jest o 546 większy niż licznik. Wyznacz ten ułamek.

2. Cyfra dziesiątek liczby dwucyfrowej p jest o 2 większa od cyfry jedności tej liczby. Jeżeli w liczbie p przestawimy cyfry, to otrzymamy liczbę, której iloraz przez p jest równy $\frac{4}{7}$. Wyznacz liczbę p .

3. Suma pewnej liczby i jej odwrotności jest równa 2,9. Wyznacz tę liczbę.

4. Licznik pewnego ułamka jest o 1 większy niż jego mianownik, a sam ułamek jest o 0,45 większy od swojej odwrotności. Wyznacz ten ułamek.

5. Beata poprosiła koleżanki o pomoc w wypisaniu 72 zaproszeń. Ponieważ dwie z nich nie przyszły, każda z pozostałych dziewcząt musiała wypisać o sześć zaproszeń więcej, niż zaplanowała Beata. Ile osób wypisywało zaproszenia, jeżeli wiadomo, że każda z nich wypisała ich tyle samo?

6. Właściciel sklepu ogrodniczego kupił jednakowe sadzonki drzewek za łączną kwotę 294 zł. Posadził przed sklepem trzy drzewka, a pozostałe sprzedał za 324 zł z zyskiem 4 zł za każde z nich. Ile zapłacił za jedną sadzonkę?

7. Pompa o większej wydajności opróżnia pełny zbiornik w ciągu 8 godzin. Pompa o mniejszej wydajności opróżnia go w czasie trzy razy dłuższym, niż trwa opróżnianie zbiornika przez obie pompy pracujące jednocześnie. Ile czasu opróżnia zbiornik pompa o mniejszej wydajności?

Test jednokrotnego wyboru

8. Liczby x i y , gdzie $x > y$, są odwrotnościami kolejnych liczb naturalnych. Suma liczb x i y jest o 0,4 większa od ich iloczynu. Jaki procent liczby x stanowi liczba y ?
- A. 40% B. 60% C. 75% D. 80%
9. Dany jest ułamek $u_1 = \frac{x+4}{x}$, gdzie $x > 0$. Jeżeli jego licznik i mianownik zwiększymy o 8, to otrzymamy ułamek u_2 o $\frac{1}{4}$ mniejszy od ułamka u_1 . Suma ułamków u_1 i u_2 jest równa:
- A. $\frac{15}{4}$, B. $\frac{13}{4}$, C. $\frac{11}{4}$, D. $\frac{9}{4}$.

Zestaw II

10. Dwie kopiarki o różnej wydajności, pracując jednocześnie, skopiowały pewną liczbę ulotek. Skopiowanie tylu ulotek zajęłoby pierwszej z nich trzy razy więcej czasu, a drugiej – o 4 minuty więcej. Jak długo trwało kopiowanie ulotek?
11. Pan Nowak zebrał połowę plonów własnym kombajnem. Potem poprosił o pomoc syna i dalej pracowali razem, używając dwóch maszyn. Zebranie plonów zajęło łącznie 10 godzin. Gdyby ojciec i syn od początku pracowali razem, trwałoby 8 godzin. Ile czasu zajęłoby samodzielne zebranie plonów panu Nowakowi, a ile – jego synowi?
12. Dwóch egzaminatorów, pracując jednocześnie, sprawdziło wszystkie testy w ciągu 12 godzin. Gdyby najpierw pierwszy egzaminator sprawdził połowę testów, a potem drugi – pozostałą część, praca zajęłaby im 25 godzin. Ile czasu zajęłoby samodzielne sprawdzanie wszystkich testów każdemu z egzaminatorów?
13. Dwóch egzaminatorów sprawdzało testy. Pierwszy rozpoczął pracę o 8⁰⁰, a drugi – dwie godziny później. Do 14⁰⁰ sprawdzono 55% testów. Egzaminatorzy skończyli pracę jednocześnie i wtedy okazało się, że obaj sprawdzili tyle samo testów. Ile czasu zajęłoby samodzielne sprawdzenie wszystkich testów każdemu z egzaminatorów?

2.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Zestaw I

1. Z miast A i B oddalonych od siebie o 210 km wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Poruszały się ze stałą prędkością i minęły się w odległości 90 km od miasta A . Oblicz prędkość każdego z nich, wiedząc, że jeden jechał o 15 km/h szybciej niż drugi.
2. Rowerzysta przejechał pierwszy odcinek trasy liczący 25 km w czasie dwa razy dłuższym niż drugi odcinek, którego długość wynosiła 15 km. Oblicz średnią prędkość rowerzysty na drugim odcinku, jeśli była ona o 2 km/h większa niż jego średnia prędkość na pierwszym odcinku.
3. Trasę o długości 144 km samochód przejechał w czasie o godzinę krótszym niż motocykl. Oblicz średnią prędkość każdego z pojazdów na tym odcinku, jeśli średnia prędkość samochodu była o 24 km/h większa niż średnia prędkość motocykla.
4. Odległość kolejowa między miastami A i B wynosi 210 km, a odległość drogowa między nimi jest równa 175 km. Pociąg wyjechał z miasta A do miasta B o godzinę później niż autobus. Przebył całą trasę ze średnią prędkością o 40 km/h większą niż wynosiła średnia prędkość autobusu i dotarł do miasta B o 10 minut wcześniej. Oblicz średnią prędkość każdego z pojazdów.

Test jednokrotnego wyboru

5. Rowerzysta pokonał trasę 60-kilometrowego rajdu ze średnią prędkością v . Gdyby jego średnia prędkość była o 3 km/h większa, przejechałby tę trasę w czasie o godzinę krótszym. Ile czasu zajęłoby mu przejechanie trasy rajdu ze średnią prędkością $v + 6$ km/h?
- A. 3 godziny 10 minut C. 3 godziny 20 minut
B. 3 godziny 15 minut D. 3 godziny 45 minut
6. Prędkość wody w nurcie rzeki wynosi 2 km/h. Płynąc z prądem, kajakarz pokonał trasę o długości 16 km w czasie o 2 godziny krótszym, niż zajęła mu droga powrotna w górę rzeki. Ile czasu łącznie płynął kajakarz?
- A. 4 godziny 30 minut C. 6 godzin 30 minut
B. 6 godzin D. 8 godzin

7. Samochód przejechał dwie trzecie trasy liczącej 360 km ze stałą prędkością v , a pozostały odcinek trasy przebył z prędkością o 30 km/h większą. Ile czasu jechał z prędkością v , jeśli pokonanie całej trasy zajęło mu 5 godzin i 20 minut?

- A. 4 godziny
B. 4 godziny 20 minut
C. 4 godziny 30 minut
D. 4 godziny 40 minut

Zestaw II

8. Samochód dostawczy wyjechał z miasta A do miasta B . Dotarł do celu i po 15 minutach postoju wyruszył w drogę powrotną. Łącznie przejechał 160 km, a cała podróż zajęła mu 2,5 godziny. Oblicz średnią prędkość samochodu na trasie z miasta A do miasta B , wiedząc, że była ona o 16 km/h mniejsza niż średnia prędkość, z jaką poruszał się w drodze powrotnej.
9. Aby dotrzeć do szlaku rowerowego, turysta przejechał samochodem 75 km. Następnie przesiadł się na rower i po 20 km osiągnął cel wycieczki. Podróż w tę stronę zajęła mu 3 godziny. W drodze powrotnej jechał rowerem ze średnią prędkością o 5 km/h mniejszą, a samochodem – ze średnią prędkością o 15 km/h większą niż poprzednio. Cały powrót trwał o 15 minut dłużej niż droga w tamtą stronę. Oblicz średnią prędkość jazdy samochodem i średnią prędkość jazdy rowerem na pierwszym etapie podróży.

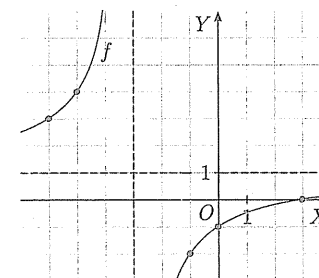
Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Punkt $A(a, b)$, gdzie $a, b > 0$, należy do wykresu pewnej proporcjonalności odwrotnej. Wykaż, że punkt B też należy do tego wykresu.
a) $B\left(\frac{a}{ab+b}, b^2(a+1)\right)$ b) $B\left(\frac{6b^2+3b}{9a}, \frac{3a^2}{2b+1}\right)$ c) $B\left(\frac{a^2b+4ab+4b}{a+2}, \frac{a}{a+2}\right)$
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{4}{x}$. Wyznacz m , wiedząc, że funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od m dla $x \in (0; \frac{8}{3})$.
- W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $\vec{u} = [-3, 1]$ otrzymano wykres funkcji g . Zapisz wzór funkcji g , naszkicuj jej wykres i określ przedziały monotoniczności, jeżeli:
a) funkcja g przyjmuje wartość 2 dla argumentu $x = 3$,
b) miejscem zerowym funkcji g jest liczba $x = -7$.
- Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u} = [p, q]$ i otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz:
a) wzór funkcji g , jeśli $f(x) = -\frac{8}{x}$, $p = -2$, $q = 6$,
b) wzór funkcji g , jeśli $f(x) = \frac{4}{x-3} + 1$, $p = 2$, $q = -3$,
c) współrzędne p i q , jeśli $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+4} + 2$,
d) wzór funkcji f , jeśli $p = -3$, $q = -5$, $g(x) = \frac{3,5}{2x+1} - 0,5$.

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$.

- Wyznacz a i b .
- Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 3.
- Rozwiąż równanie $(f(x))^2 = 4$.
- Rozwiąż równanie $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.



6. Wyznacz równanie hiperboli przechodzącej przez punkt P , której osiami symetrii są podane proste.
- $y = x + 4$, $y = 2 - x$, $P(-2, -1)$
 - $y = x - 1$, $y = 7 - x$, $P(7, 2)$

7. Podaj wzór funkcji homograficznej g , której wykres przecina oś OY w punkcie A i ma ten sam środek symetrii co wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji g .

a) $f(x) = \frac{3x+6}{2-x}$, $A(0, -2)$

b) $f(x) = \frac{4-2x}{x+3}$, $A(0, -4)$

c) $f(x) = \frac{5x-4}{x-1}$, $A(0, 1)$

8. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x}{3x-1} + \frac{6+x}{2-6x}$

c) $f(x) = \frac{2x}{x-2} + \frac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{x}{2-5x} - \frac{1-x}{10x-4}$

d) $f(x) = \frac{3x}{x+3} - \frac{2x+1}{x-1}$

9. Wykonaj działania. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $(2+x) \cdot \frac{2x+1}{4-x^2}$

d) $\frac{3x}{x^2-2x+1} - \frac{x+1}{x^2+x-2}$

b) $2+x \cdot \frac{2x+1}{4-x^2}$

e) $\left(\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-2}\right) \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-1}$

c) $\frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} + \frac{4}{x+1}$

f) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} : \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$

10. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-3}{x+4} = 3$

d) $2x - 1 + \frac{4}{x-1} = \frac{7}{x-1}$

b) $\frac{x+1}{2-x} = 2x$

e) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x}{x-1}$

c) $x + \frac{x}{x+2} = \frac{10}{x+2}$

f) $\frac{1-x}{x+1} = \frac{x-2}{x-5}$

Zestaw II

11. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x+3}{x-1} = 1$

b) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x+3} = \frac{9}{x^2+3x}$

c) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2+2x}$

12. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{|3-4x|} = \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{2x}{|x|-3} = 4$

c) $\frac{|x+5|}{x-5} - \frac{8}{x-1} = \frac{32}{x^2-6x+5}$

13. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+7}{x-4} \geq 0$

d) $2 - \frac{3}{x+2} \leq \frac{5}{x+2}$

g) $\frac{2}{3x-2} \geq \frac{1}{2x+5}$

b) $\frac{1-x}{x+1} \geq 1$

e) $\frac{6x+4}{x+2} > 2x$

h) $1 + \frac{2}{x+1} \leq \frac{4}{3-x}$

c) $\frac{1}{2x-6} > \frac{3}{6x-2}$

f) $\frac{4}{x+1} < x-2$

i) $\frac{1}{x-1} \leq 1 + \frac{3}{2x}$

14. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{|x-6|} \geq 3$

b) $\frac{2}{|x-2|} > 1 + \frac{1}{|2-x|}$

c) $\frac{3}{|x|-4} \leq 1$

15. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+4}}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{2x-1} + \frac{x}{2-4x}}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{2x-1}} + \sqrt{\frac{x}{2-4x}}$

16. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = x+1$

c) $f(x) = \left|\frac{x+2}{x-2}\right|$, $g(x) = 1$

b) $f(x) = \frac{x}{x-4}$, $g(x) = \frac{4}{2-x} + 1$

d) $f(x) = \frac{6}{|x|-2}$, $g(x) = x^2 - 3$

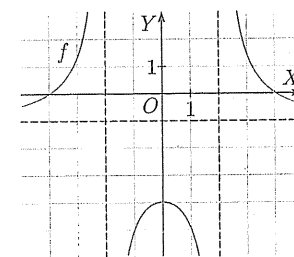
17. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{16-x^2}{x^2-4}$. Rozwiąż nierówność:

a) $f(x) \leq -5$,

b) $f(x) \leq |f(x)|$,

c) $f(x) \cdot (x-2) \geq 0$,

d) $f(x) \cdot (2-x)x \leq 0$.



18. Naskicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

a) $f(x) = 4 - \frac{2}{|x-1|}$

b) $f(x) = \left|\frac{4-x}{x-2}\right|$

c) $f(x) = \frac{|x|}{x-4}$

19. Dana jest funkcja homograficzna $f(x) = \frac{mx-1}{m-x}$, gdzie $m \neq 1$.

a) Naskicuj wykres tej funkcji dla $m = -2$. Odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 5.

b) Wyznacz wartości parametru m , dla których funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; m)$ i $(m; \infty)$.

20. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| = 2m+3$ ma dwa różne pierwiastki większe od 1.

21. Dla jakich wartości parametru m punkt wspólny prostych $3x - my - 2 = 0$ i $x - 3y + 1 = 0$ należy do zbioru $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y > 1\}$?

22. Uzasadnij, że podana równość zachodzi dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{2}{2+x} + \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - \frac{x}{2+x}$$

23. Uzasadnij, że podana równość zachodzi dla dowolnej liczby $x \neq 0$.

$$\frac{(5+x)^2}{5x} = 4 + \frac{(5-x)^2}{5x}$$

24. Wykaż, że dowolne liczby rzeczywiste x i y , gdzie $x^2 - y^2 \neq 0$, spełniają podaną równość.

$$\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

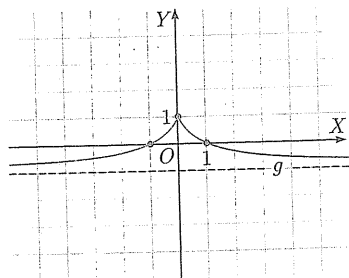
25. Po modernizacji odcinka linii kolejowej o długości 360 km średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie wzrosła o 30 km/h, a czas jazdy skrócił się o godzinę. Z jaką średnią prędkością pociąg przejeżdżał tę trasę przed modernizacją?

26. Książka ma 216 stron. Konrad czytał codziennie po tyle samo stron i skończył książkę o jeden dzień wcześniej niż Staś. Ile dni Staś czytał książkę, jeżeli każdego dnia czytał o trzy strony mniej niż Konrad?

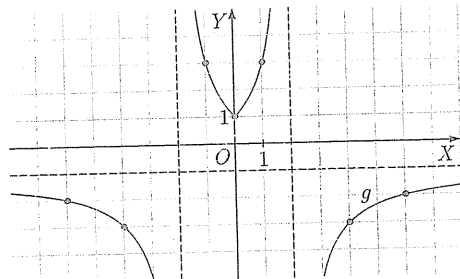
Zestaw III

27. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji postaci $g(x) = f(|x|)$, gdzie f jest funkcją homograficzną. Podaj wzór funkcji g . Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$ i wyznacz zbiór rozwiązań równania $g(x) = h(x)$.

a)



b)



28. Rozwiąż graficznie układ równań.

a)
$$\begin{cases} xy + 2y - x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy = x + 3y + 3 \\ xy = 4x - 6 \end{cases}$$

29. Wyznacz wartości parametru m , dla których dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = \frac{3x+m}{mx+3}$

b) $f(x) = \frac{x^4-3mx^2+2}{(m+1)x^2-4mx+m+1}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{mx^2-6x+m-8}{x^2+4x+m+1}}$

30. Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m-1)x^2 - (m+2)x + 2m-1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

31. Wyznacz wartości parametru m , dla których pierwiastki x_1 i x_2 równania $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m$.

32. Dane jest równanie $x^2 + 4mx + 4m = 0$. Funkcja f każdej wartości parametru m , dla której to równanie ma dwa różne niezerowe pierwiastki x_1 i x_2 , przyporządkowuje wartość sumy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Podaj wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

33. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $|x+4| = \frac{m}{m-3}$ ma dwa różne pierwiastki ujemne.

34. Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{5}{x^2+4} + \frac{x^2+4}{5}$.

a) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2?

b) Wykaż, że najmniejszą wartością funkcji f jest liczba 2.

*3. Funkcje trygonometryczne

*3.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Zestaw I

1. Czy istnieje trójkąt prostokątny o kącie ostrym α spełniającym podane warunki?

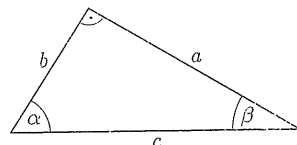
- a) $\sin \alpha = \frac{3}{11}$, $\cos \alpha = \frac{8}{11}$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{3}$
 c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$

2. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α leżącego naprzeciw boku a , jeśli:

- a) $a = 12$, $b = 5$, b) $a = 6$, $b = 8$, c) $a = 7$, $b = 9$.

3. Oblicz obwód trójkąta przedstawionego na rysunku obok, wiedząc, że:

- a) $a = 5$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$,
 b) $b = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$,
 c) $c = 10$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$,
 d) $b = 12$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.



4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt P .

- a) $P(3, 2)$ c) $P(-3, -1)$
 b) $P(-4, 5)$ d) $P(5, -2)$

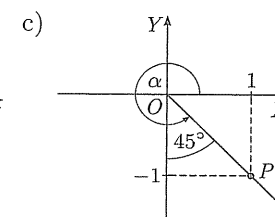
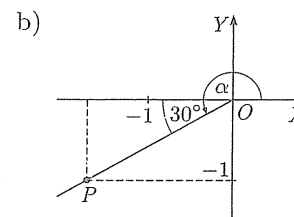
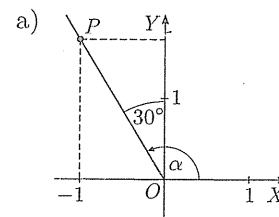
5. Wskaż dowolny punkt należący do ramienia końcowego kąta α , jeśli:

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$,
 b) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$,
 c) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$.

6. Zbuduj kąt α , jeśli:

- a) $\sin \alpha = 0,4$, $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$, b) $\operatorname{tg} \alpha = 6$, $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.

7. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α zaznaczonego na rysunku kolorem.



8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta.

- a) 225° b) 300° c) 240°

9. Czy istnieje kąt β spełniający podane warunki? Jeśli tak, to w której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się jego ramię końcowe?

- a) $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{5}$
 b) $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{3}$
 c) $\sin \beta = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$

Test jednokrotnego wyboru

10. Jeżeli punkt $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ należy do ramienia końcowego kąta α , to sinus kąta α jest równy:

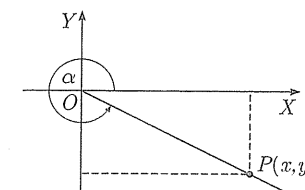
- A. $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$, B. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$, C. $-\frac{3\sqrt{13}}{26}$, D. $-\frac{3\sqrt{13}}{52}$.

11. Który punkt nie należy do ramienia końcowego kąta α , jeśli $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$?

- A. $P(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1)$ C. $R(-1, -\frac{\sqrt{5}}{2})$
 B. $Q(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -2)$ D. $S(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 2)$

12. Punkt $P(x, y)$ należy do ramienia końcowego kąta α (rysunek obok). Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ i $|OP| = 2$, to:

- A. $x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, C. $x = \sqrt{5}$,
 B. $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, D. $x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.



Zestaw II

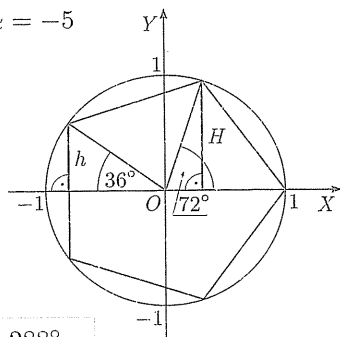
13. Sprawdź, czy dowolne kąty α i β należące do przedziałów $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ i $\beta \in (180^\circ; 270^\circ)$ spełniają podaną nierówność.

- a) $\sin \alpha > \operatorname{tg} \beta$ c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} < 0$
b) $\sin \alpha + \cos \beta < 0$ d) $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \alpha$

14. Zbuduj kąt α i wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta. Rozpatrz dwie możliwości.

- a) $\sin \alpha = 0,5$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$
b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ d) $\operatorname{ctg} \alpha = -5$

15. W okrąg o środku $O(0,0)$ wpisano pięciokąt foremny, w którym dane są długości odcinków $h = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ i $H = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ (rysunek obok).



- a) Uzupełnij tabelę.

α	72°	144°	216°	288°
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				

- b) Narysuj odbicie symetryczne tego pięciokąta względem osi OY , a następnie uzupełnij tabelę.

α	36°	108°	252°	324°
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				

16. Oblicz.
 $\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \cos^2 135^\circ \cdot \sin 240^\circ + \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} 150^\circ \cdot \operatorname{ctg} 315^\circ}{\cos 225^\circ - \sin 135^\circ} \cdot \left(\frac{1}{4} - \sqrt{3} \cos 330^\circ\right)$

*3.2. Kąt obrotu

Zestaw I

1. Podaj przykłady trzech różnych kątów, których ramię końcowe pokrywa się z ramieniem końcowym kąta α .

- a) $\alpha = 31^\circ$ b) $\alpha = 123^\circ$ c) $\alpha = 1000^\circ$

2. Wyznacz kąt β , jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt $P(5, -5)$ oraz:

- a) $\beta \in \langle -720^\circ; -360^\circ \rangle$,
b) $\beta \in \langle 1800^\circ; 2160^\circ \rangle$,
c) $\beta \in \langle 3000^\circ; 3360^\circ \rangle$.

3. Zaznacz w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego kąta α . Podaj wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

- a) $\alpha = 780^\circ$ b) $\alpha = -930^\circ$ c) $\alpha = 765^\circ$ d) $\alpha = -585^\circ$

4. Oblicz.

- a) $\sin(3 \cdot 360^\circ + 60^\circ)$ b) $\cos(-5 \cdot 360^\circ + 30^\circ)$ c) $\operatorname{tg}(4 \cdot 360^\circ + 45^\circ)$

5. Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $k \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

- a) 403° b) -534° c) 861° d) -844°

6. Oblicz.

- a) $\sin 1935^\circ$ d) $\cos 3630^\circ$ g) $\operatorname{ctg}(-315^\circ)$
b) $\sin(-1485^\circ)$ e) $\operatorname{tg} 600^\circ$ h) $\sin 2880^\circ$
c) $\cos(-1035^\circ)$ f) $\operatorname{tg}(-420^\circ)$ i) $\operatorname{ctg} 2850^\circ$

7. Wyznacz kąt α i podaj wartości jego pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeśli:

- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in (360^\circ; 450^\circ)$, c) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$ i $\alpha \in (-450^\circ; -360^\circ)$,
b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in (450^\circ; 540^\circ)$, d) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ i $\alpha \in (-720^\circ; -630^\circ)$.

8. Oblicz.

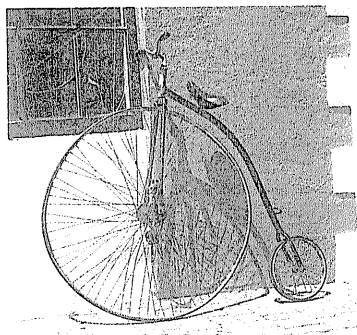
- a) $3 \sin(-840^\circ) - 4 \operatorname{tg} 1500^\circ$ d) $\cos(-420^\circ) + 2 \sin(-1620^\circ)$
b) $\frac{\sin 675^\circ + 2 \cos 1170^\circ}{\operatorname{tg}(-150^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 390^\circ}$ e) $\frac{4 \cos(-810^\circ) - 3 \sin 1215^\circ}{\sin 600^\circ + \cos 720^\circ}$
c) $\frac{4 \cos 750^\circ - 3 \sin(-540^\circ)}{\operatorname{ctg}(-450^\circ) + \operatorname{tg} 390^\circ}$ f) $\frac{\sin 600^\circ \cdot \cos 810^\circ}{\sin(-150^\circ) - \cos 540^\circ}$

Test jednokrotnego wyboru

9. Sinus kąta -2490° jest równy:
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, B. $-\frac{1}{2}$, C. $\frac{1}{2}$, D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
10. Punkt $P(-\sqrt{3}, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta o mierze:
 A. -930° , B. -570° , C. 1590° , D. 1920° .
11. Wartość wyrażenia $\sin(-660^\circ) \cdot \operatorname{tg} 1140^\circ - \cos(-330^\circ) \cdot \sin 780^\circ$ wynosi:
 A. 0, B. $\frac{3}{4}$, C. 1, D. $\frac{3}{2}$.
12. Ramię końcowe kąta 2673° leży w ćwiartce:
 A. I, B. II, C. III, D. IV.

Zestaw II

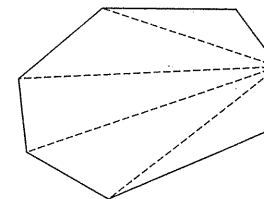
13. Ustal znak wyrażenia $\cos(\alpha + 180^\circ) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$, jeśli:
 a) $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$, b) $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.
14. Oblicz sumę miar wszystkich kątów z przedziału $\langle 0^\circ; 500^\circ \rangle$, których ramię końcowe jest zawarte w wykresie funkcji f .
 a) $f(x) = -x$ b) $f(x) = \sqrt{3}x$
15. Czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą całkowitą?
 $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ + \dots + \cos 870^\circ + \cos 900^\circ$
16. Podaj współrzędne punktu P' , który otrzymamy w wyniku obrotu punktu $P(-2, 2\sqrt{3})$ wokół początku układu współrzędnych o kąt:
 a) 30° , b) -150° , c) 780° , d) -165° .
17. Większe koło bicykla ma średnicę 2 m, a średnica mniejszego koła jest równa 40 cm. O jaki kąt obróci się każde z kół, w czasie gdy cyklista przejedzie drogę 100π metrów?



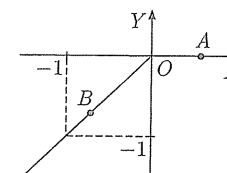
*3.3. Miara łukowa kąta

Zestaw I

1. Porównaj liczby.
 a) $3(\pi - 3)$ i $\frac{17}{40}$ c) $\frac{\pi}{5}$ i $\frac{1257}{2000}$
 b) 5π i $15,7$ d) $\frac{1}{\pi}$ i $0,316$
2. Podaj miarę łukową kąta.
 a) 90° c) 110° e) 15° g) 144°
 b) 75° d) 40° f) 72° h) 210°
3. Podaj miarę kąta w stopniach.
 a) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{7}{4}\pi$ e) $\frac{7}{8}\pi$ g) $\frac{8}{3}\pi$
 b) $\frac{\pi}{5}$ d) $\frac{5}{3}\pi$ f) $\frac{15}{4}\pi$ h) $\frac{11}{6}\pi$
4. Podaj w radianach, ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych dowolnego:
 a) trójkąta,
 b) czworokąta wypukłego,
 c) pięciokąta wypukłego,
 d) sześciokąta wypukłego,
 e) n -kąta wypukłego.
5. Czy punkt $P(-4, 4\sqrt{3})$ należy do ramienia końcowego kąta α ?
 a) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ c) $\alpha = \frac{8}{3}\pi$
 b) $\alpha = -\frac{8}{3}\pi$ d) $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$
6. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę $\frac{\pi}{4}$. Wyznacz miary pozostałych kątów.



7. Półprosta OA po obrocie o kąt β pokryła się z półprostą OB (rysunek obok). Podaj miarę kąta β , jeżeli:



- a) $\beta \in (0; 2\pi)$, c) $\beta \in (-2\pi; 0)$,
 b) $\beta \in (4\pi; 6\pi)$, d) $\beta \in (-8\pi; -6\pi)$.

8. Oblicz.

- a) $\sin \frac{\pi}{6}$ c) $\operatorname{tg} \frac{7}{4}\pi$ e) $\cos \frac{2}{3}\pi$ g) $\operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi$
 b) $\cos \frac{5}{3}\pi$ d) $\operatorname{ctg} \frac{5}{4}\pi$ f) $\operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi$ h) $\sin \frac{11}{6}\pi$

9. Wyznacz kąt α , wiedząc, że $\alpha \in (0; 2\pi)$, a jego ramię końcowe pokrywa się z ramieniem końcowym kąta β .

- a) $\beta = \frac{19}{6}\pi$ d) $\beta = -\frac{15}{4}\pi$ g) $\beta = -\frac{5}{16}\pi$
 b) $\beta = \frac{25}{3}\pi$ e) $\beta = -\frac{22}{7}\pi$ h) $\beta = \frac{110}{3}\pi$
 c) $\beta = \frac{27}{5}\pi$ f) $\beta = \frac{31}{4}\pi$ i) $\beta = -\sqrt{5}\pi$

10. Oblicz.

- a) $\operatorname{tg} \frac{23}{4}\pi$ c) $\cos \frac{41}{6}\pi$ e) $\cos \frac{13}{4}\pi$ g) $\sin(-\frac{15}{6}\pi)$
 b) $\sin \frac{17}{3}\pi$ d) $\operatorname{ctg}(-\frac{19}{4}\pi)$ f) $\operatorname{tg}(-\frac{212}{3}\pi)$ h) $\operatorname{tg} \frac{80}{3}\pi$

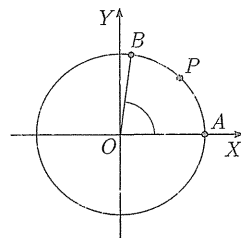
Test jednokrotnego wyboru

11. Miara kąta $7^\circ 30'$ wyrażona w radianach jest równa:

- A. $\frac{\pi}{16}$, B. $\frac{\pi}{18}$, C. $\frac{\pi}{20}$, D. $\frac{\pi}{24}$.

12. Miara kąta AOB (rysunek obok) jest równa 1,5. Jeśli długość łuku APB wynosi 6, to długość odcinka OA jest równa:

- A. $\frac{2}{3}\pi$, C. 4,5,
 B. 4, D. $\frac{3}{2}\pi$.



13. Wartość wyrażenia $\cos(-\frac{23}{4}\pi) \cdot \sin \frac{13}{3}\pi$ jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$, B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$, C. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, D. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Zestaw II

14. Podaj miarę łukową kąta.

- a) $25^\circ 27' 06''$ b) $66^\circ 45' 30''$ c) $105^\circ 54' 45''$

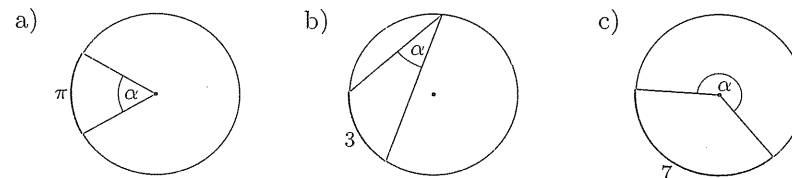
15. Wyznacz miarę łukową kąta wypukłego, jaki tworzą wskazówki godzinowa i minutowa o podanej godzinie.

- a) 12.30 b) 17.40 c) 21.05 d) 22.15

16. Od godziny 15.00 wskazówka minutowa obróciła się o kąt $\frac{23}{6}\pi$. Którą godzinę wskazuje zegar?

17. Kąt środkowy α wyznacza w kole o promieniu 4 cm wycinek, którego pole jest równe 10 cm^2 . Podaj miarę łukową kąta α .

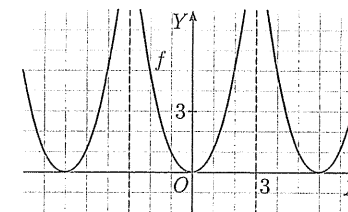
18. Wyznacz miarę łukową kąta α , jeśli promień okręgu jest równy 3.



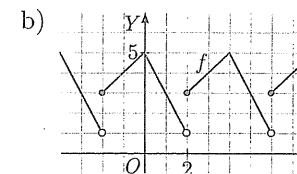
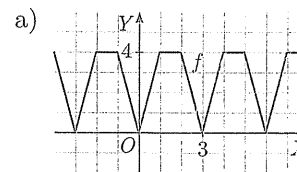
*3.4. Funkcje okresowe

Zestaw I

1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 6$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f . Wyznacz jej miejsca zerowe w przedziale $\langle 100; 110 \rangle$.



2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej f . Odczytaj z niego okres podstawowy T tej funkcji. Oblicz: $f(7)$, $f(-19)$ i $f(120)$.



3. Dana jest funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 6$, określona w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$ wzorem $f(x) = |x| - 2$. Oblicz:

- a) $f(6)$, b) $f(21)$, c) $f(-43)$, d) $f(-202)$.

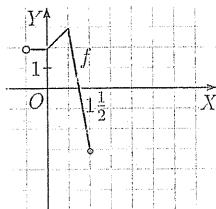
4. Naszkicuj wykres funkcji okresowej f o okresie podstawowym $T = 4$, wiedząc, że w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$ wykres ten pokrywa się z wykresem funkcji g .

- a) $g(x) = 2x - 5$ b) $g(x) = x^2 - 4x + 1$ c) $g(x) = |x - 3|$

5. Dana jest funkcja okresowa f o okresie podstawowym $T = 3$, określona w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ wzorem $f(x) = x^2 + x$.
- Naszkicuj wykres funkcji f dla $x \in \langle 0; 10 \rangle$.
 - Podaj wszystkie miejsca zerowe funkcji f należące do przedziału $\langle 0; 10 \rangle$.
 - Oblicz sumę wszystkich dodatnich miejsc zerowych funkcji f mniejszych od 100.
6. Dana jest funkcja okresowa f o okresie podstawowym $T = 5$, określona w przedziale $\langle 98; 103 \rangle$ wzorem $f(x) = |100 - x| + 2$.
- Naszkicuj wykres funkcji f dla $x \in \langle -5; 5 \rangle$.
 - Podaj największe ujemne miejsce zerowe funkcji $g(x) = f(x) - 3$.
 - Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania $f(x) = 4$ należących do przedziału $\langle -5; 5 \rangle$.
7. Ustal, które liczby $x \in \langle -2; 8 \rangle$ spełniają nierówność $f(x) \leq 2$, jeśli f jest funkcją okresową o okresie podstawowym T , a jej wykres pokrywa się w przedziale $\langle 0; T \rangle$ z wykresem funkcji g .
- $T = 4, g(x) = 4 - 2x$
 - $T = 2, g(x) = (x - 1)^2$
 - $T = 4, g(x) = |x - 2| + 2$

Test jednokrotnego wyboru

8. Dana jest funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 7$. Jeśli dla $x \in \langle -3; 4 \rangle$ zachodzi równość $f(x) = x^2 - 1$, to:
- A. $f(107) = -1$, B. $f(107) = 3$, C. $f(107) = 7$, D. $f(107) = 8$.
9. Wykres funkcji okresowej $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 3$ pokrywa się w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ z wykresem funkcji f , który pokazano na rysunku. Suma miejsc zerowych funkcji g należących do przedziału $\langle 0; 10 \rangle$ jest równa:
- A. 10,5, B. 11,5, C. 12,5, D. 13,5.
10. Jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \frac{5}{6}$, to:
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{13}{6}\right)$, C. $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{11}{6}\right)$,
 - $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{11}{6}\right)$, D. $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{13}{6}\right)$.



Zestaw II

11. Dana jest funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 4$ określona w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ wzorem $f(x) = x^2$. Wyznacz argumenty, dla których:
- $f(x) = 1$, b) $f(x) = 3$, c) $f(x) \leq 1$, d) $f(x) > 2$.
12. Na zbiorze liczb całkowitych określono funkcję f wzorem:
- $$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Czy funkcja f jest okresowa? Jeśli tak, to podaj jej okres podstawowy T .
13. Ustal, czy zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ może być:
- dzielną funkcji okresowej,
 - zbiorem wartości funkcji okresowej.
14. Uzasadnij, że jeśli funkcja f jest okresowa, to funkcja $g(x) = af(x) + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$, też jest funkcją okresową o takim samym okresie podstawowym jak funkcja f .
15. Dana jest funkcja okresowa f o okresie podstawowym T . Czy funkcja g dana wzorem $g(x) = (f(x))^2 + 1$ również jest funkcją okresową? Jeśli tak, to czy jej okres podstawowy jest równy T ?
16. Dane są funkcje okresowe f i g o okresach podstawowych równych odpowiednio T_f i T_g . Wykaż, że funkcja $h(x) = f(x) + ag(x)$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, też jest funkcją okresową. Ile jest równy jej okres podstawowy T_h ?
17. Wykaż, że funkcja okresowa albo nie ma w ogóle miejsc zerowych, albo ma ich nieskończenie wiele.

*3.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

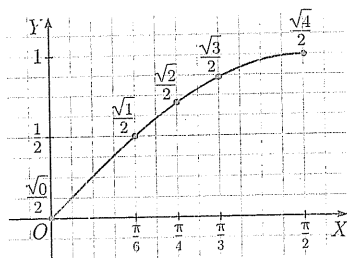
Zestaw I

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$. Wskaż argumenty, dla których funkcja f przyjmuje podaną wartość.
- 1 b) -1 c) 0 d) $-\frac{1}{2}$

2. Na rysunku obok pokazano prosty sposób na zapamiętanie wartości funkcji sinus dla argumentów:

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}.$$

Sporządź analogiczny rysunek dla funkcji cosinus.



3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$. Wskaż argumenty, dla których funkcja f przyjmuje podaną wartość.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

4. Ustal znak liczby.

a) $\sin 3$ b) $\cos 1$ c) $\cos 2$ d) $\cos \frac{3}{2}$

5. Wyznacz x , jeśli:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $x \in \langle 10\pi; 12\pi \rangle$,
 b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x \in \langle -6\pi; -4\pi \rangle$,
 c) $\cos x = \frac{1}{2}$ i $x \in \langle 7\pi; 9\pi \rangle$,
 d) $\sin x = 0$ i $x \in \langle -13; -9 \rangle$.

6. Ile miejsc zerowych ma funkcja f w podanym przedziale?

a) $f(x) = \sin x, \langle -3\pi; 3\pi \rangle$ c) $f(x) = \cos x, \langle 7\pi; 17\pi \rangle$
 b) $f(x) = \cos x, \langle -5\pi; -2\pi \rangle$ d) $f(x) = \sin x, \langle 0; 15 \rangle$

7. Wskaż najmniejszą liczbę x spełniającą podane warunki.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$
 b) $\cos x = \frac{1}{2}$ i $x \in \langle -4\pi; -2\pi \rangle$
 c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $x \in \langle 10; 15 \rangle$

8. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = \sin x, x \in \langle -3\pi; -\pi \rangle$ b) $f(x) = \cos x, x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$

9. Ustal, dla jakich wartości parametru a równanie $\cos x = a$ ma w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ dokładnie:

a) dwa rozwiązania, b) trzy rozwiązania.

10. Ustal, dla jakich całkowitych wartości parametru k równanie $\sin x = 1$ ma w przedziale $\langle 2\pi; k\pi \rangle$ dokładnie:

a) cztery rozwiązania, b) osiem rozwiązań.

11. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle 3\pi; 5\pi \rangle$.

a) $4 \sin x + 1 = 3$ c) $\cos x + 2 \cos x + 4 \cos x = 0$
 b) $3 - \cos x = 4 - 2 \cos x$ d) $3 \sin x + 1 = 5 - \sin x$

Test jednokrotnego wyboru

12. Prosta $x = \frac{a\pi}{2}$ jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$, jeśli a jest całkowitym pierwiastkiem równania:

A. $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$, C. $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$,
 B. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$, D. $x^3 + 4x^2 - 3x - 12 = 0$.

13. Zbiór wartości funkcji $f(x) = \cos x$ nie zawiera liczby:

A. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, B. $\frac{2}{\pi}$, C. $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$, D. $\frac{1}{0,9}$.

14. Ile rozwiązań równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ należy do przedziału $\langle -6; 6 \rangle$?

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

Zestaw II

15. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ e) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin x = \sqrt{2}$ f) $\sin x = -0,5$

16. Rozwiąż graficznie podane równanie.

a) $2x^2 + 1 = \cos x$ b) $\sin x = -3x$

17. Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{12}, x \in \langle 2\pi; 4\pi \rangle$ c) $\cos x = \cos \frac{15}{8}\pi, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$
 b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}, x \in \langle -3\pi; 0 \rangle$ d) $\sin x = \sin \frac{100}{9}\pi, x \in \langle -2; 2 \rangle$

18. Ustal, ile liczb całkowitych z przedziału $\langle 3\pi; 5\pi \rangle$ należy do zbioru rozwiązań nierówności $\sin x > \cos x$.

19. Dla jakich wartości parametru k podane równanie ma rozwiązanie?

$$\cos x = \frac{k^2 + 3k + 1}{k - 1}$$

20. Funkcja g każdej rzeczywistej wartości m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania

$$\sin x = \frac{2m}{m^2 + 1}$$

należących do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$. Naskicuj wykres funkcji g .

*3.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens

Zestaw I

1. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Wskaż argumenty, dla których funkcja f przyjmuje podaną wartość.

- a) $\sqrt{3}$ b) -1 c) 0 d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$, gdzie $x \in \langle -\pi; 0 \rangle \cup (0; \pi)$. Wskaż argumenty, dla których funkcja f przyjmuje podaną wartość.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) -1 c) $-\sqrt{3}$ d) 0

3. Ustal znak liczby.

- a) $\operatorname{tg} 3$ b) $\operatorname{ctg} 1$ c) $\operatorname{tg} 2$ d) $\operatorname{tg} \frac{3}{2}$

4. Wyznacz x , jeśli:

- a) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \langle 10\pi; 11\pi \rangle$, c) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle 6\pi; 7\pi \rangle$,
b) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \langle -6\pi; -5\pi \rangle$, d) $\operatorname{tg} x = 0$ i $x \in \langle -9; -6 \rangle$.

5. Ile miejsc zerowych ma funkcja f w podanym przedziale?

- a) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\langle -5\pi; -2\pi \rangle$ c) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\langle 5\pi; 15\pi \rangle$
b) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\langle -2\pi; 3\pi \rangle$ d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\langle 0; 11 \rangle$

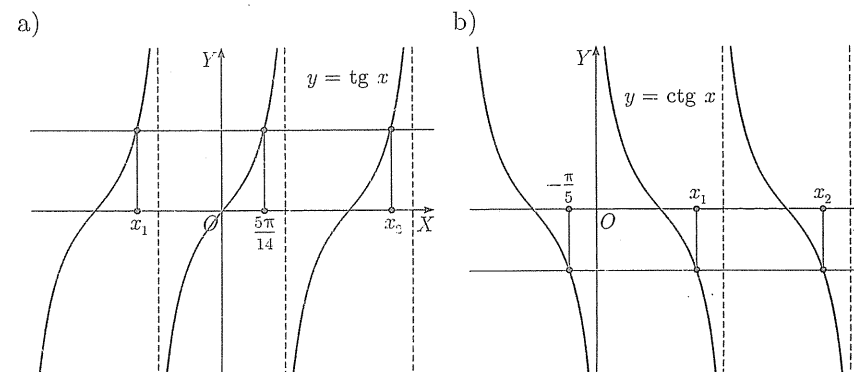
6. Wskaż największą liczbę spełniającą podane warunki.

- a) $\operatorname{tg} x = 1$ i $x \in \langle -2\pi; 3\pi \rangle$
b) $\operatorname{ctg} x = -1$ i $x \in \langle -4\pi; -2\pi \rangle$
c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x \in \langle 10; 15 \rangle$

7. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $\langle -2\pi; \pi \rangle$.

- a) $4 \operatorname{tg} x - 1 = 3$ c) $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 4 \operatorname{ctg} x$
b) $3 - 2 \operatorname{ctg} x = 4 - \operatorname{ctg} x$ d) $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{tg} x = -9\sqrt{3}$

8. Podaj argumenty x_1 i x_2 zaznaczone na wykresie.



Test jednokrotnego wyboru

9. Punkt $P(\frac{-\pi}{a+2}, 0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla:
A. $a = \frac{5}{3}$, B. $a = \frac{3}{5}$, C. $a = -\frac{1}{3}$, D. $a = -\frac{7}{3}$.

10. Ile spośród rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ spełnia warunek $|x| \leq \frac{100\pi}{3}$?
A. 67 B. 66 C. 34 D. 33

11. Który z podanych przedziałów jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x > 0$?

- A. $(\frac{9}{2}\pi; \frac{19}{4}\pi)$ B. $(\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{4}\pi)$ C. $(-\pi; -\frac{3}{4}\pi)$ D. $(-\frac{9}{4}\pi; -2\pi)$

Zestaw II

12. Rozwiąż równanie.

- a) $\operatorname{tg} x = -1$ b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ c) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

13. Ustal liczbę rozwiązań równania należących do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

- a) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ b) $\operatorname{tg} x = \cos x$ c) $\operatorname{ctg} x = \sin x$

14. Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych z przedziału $\langle -3; 6 \rangle$ spełniających nierówność $\operatorname{tg} x > \operatorname{ctg} x$.

15. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$ b) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{9}$ c) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ d) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{14\pi}{5}$

Funkcję $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ również $-x \in D$ oraz $f(-x) = f(x)$.

Funkcję $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ również $-x \in D$ oraz $f(-x) = -f(x)$.

16. Oblicz:

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, jeśli $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, c) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, jeśli $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$,
b) $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, jeśli $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, d) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, jeśli $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

17. Określ parzystość funkcji f .

a) $f(x) = 3x^2 - 2$ d) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$
b) $f(x) = 4x + 5$ e) $f(x) = \sin^2 x + \sin(x^2)$
c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$ f) $f(x) = x^2 \sin x$

*3.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

Zestaw I

1. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = \cos x - 1$
b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e) $f(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$
c) $f(x) = \sin x + 2$ f) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i równania asymptot pionowych wykresu.

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ d) $f(x) = \operatorname{ctg} x + 2$
b) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ e) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$
c) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2$ f) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - 1$

3. Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i ustal liczbę rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ c) $\frac{1}{2} + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ d) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę, miejsca zerowe i zbiór wartości.

a) $f(x) = -\sin x + 2$ d) $f(x) = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
b) $f(x) = 1 - \cos x$ e) $f(x) = \operatorname{tg}(-x) - 1$
c) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ f) $f(x) = -\operatorname{ctg}(-x) + \sqrt{3}$

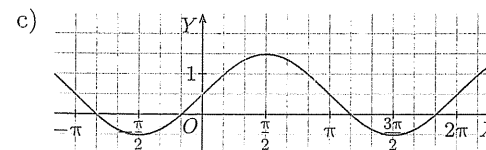
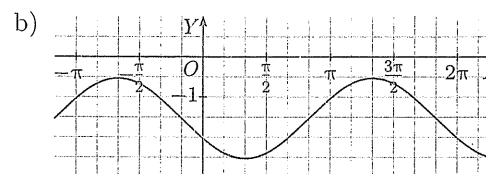
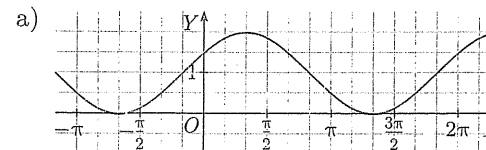
5. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, w jakich przedziałach funkcja f rośnie, a w jakich maleje.

a) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$, $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$
b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - 3$, $x \in \langle 0; \pi \rangle$
c) $f(x) = 4 - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$
d) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 1$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$

6. Rozwiąż graficznie podane równanie.

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ c) $2 - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$

7. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \cos(x - m) + k$. Wyznacz wartości m i k , jeżeli $|m| < \pi$.



Test jednokrotnego wyboru

8. Wykres funkcji $f(x) = \sin(x + \frac{3}{4}\pi) - 4$ przechodzi przez punkt:
- A. $P(\frac{\pi}{4}, -3)$, C. $R(\frac{3\pi}{4}, -4)$,
 B. $Q(\frac{7\pi}{12}, -3\frac{1}{2})$, D. $S(\frac{5\pi}{12}, -4\frac{1}{2})$.
9. Wykres funkcji $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano wykres funkcji $g(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}$. Wektor $\vec{v}$ może mieć współrzędne:
- A. $[-\frac{5}{6}\pi, -1]$, C. $[\frac{5}{6}\pi, -1]$,
 B. $[0, -1]$, D. $[\frac{7}{6}\pi, -1]$.
10. Wykres funkcji $f(x) = \sin(x - \pi)$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{2}]$ i otrzymano wykres funkcji g . Jednym z miejsc zerowych funkcji g jest liczba:
- A. $-\frac{2\pi}{3}$, B. $\frac{2\pi}{3}$, C. $\frac{5\pi}{3}$, D. $\frac{7\pi}{3}$.

Zestaw II

11. Ustal, dla jakich wartości parametrów a i b funkcja $f: \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sin(x - a) + b$:
- a) nie ma miejsc zerowych,
 b) jest malejąca.
12. Wśród podanych funkcji wskaż funkcje równe.
- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---|---|
| $y = \operatorname{tg} x$ | $y = -\operatorname{tg} x$ | $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ | $y = \operatorname{tg}(-x + \frac{3\pi}{2})$ |
| $y = \operatorname{ctg} x$ | $y = -\operatorname{ctg} x$ | $y = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2})$ | $y = \operatorname{ctg}(-x + \frac{3\pi}{2})$ |
| $y = \operatorname{tg}(-x)$ | $y = -\operatorname{tg}(-x)$ | $y = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$ | $y = -\operatorname{tg}(x + \frac{5\pi}{2})$ |
| $y = \operatorname{ctg}(-x)$ | $y = -\operatorname{ctg}(-x)$ | $y = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)$ | $y = -\operatorname{ctg}(x + \frac{5\pi}{2})$ |
13. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$. Ustal liczbę pierwiastków równania $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = k^2 - 1$ należących do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$ w zależności od wartości parametru k .
14. Funkcja $f: \langle 0; \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = 2 - \cos(x - m)$. Wyznacz jej wartości najmniejszą i największą w zależności od wartości parametru $m \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.

*3.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)

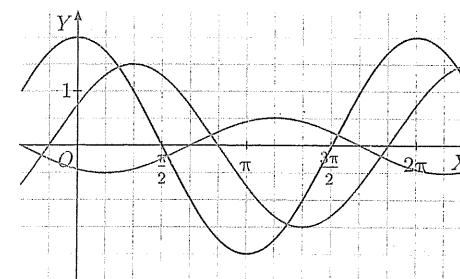
Zestaw I

1. Narysuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.
- a) $f(x) = 3 \sin x$ d) $f(x) = -2 \cos x - 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ e) $f(x) = 2 \sin(x - \frac{2\pi}{3})$
 c) $f(x) = -\frac{2}{3} \sin x$ f) $f(x) = 1 - 2 \cos(x - \frac{\pi}{6})$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$\begin{aligned} y &= a \sin(x + \frac{\pi}{2}), \\ y &= b \cos(x - \frac{\pi}{6}), \\ y &= c \sin(x + \frac{\pi}{6}). \end{aligned}$$

Wyznacz: a, b, c .



3. Narysuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.
- a) $f(x) = 2 \operatorname{tg} x$ d) $f(x) = 2 \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{3})$
 b) $f(x) = -3 \operatorname{ctg} x$ e) $f(x) = 1 - 4 \operatorname{tg} x$
 c) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6})$ f) $f(x) = 3 \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) + 1$
4. Dana jest funkcja $f(x) = a \cos x$. Dla jakich wartości parametru a :
- a) funkcja f przyjmuje wartość 3 dla argumentu $x = \frac{\pi}{3}$,
 b) do wykresu funkcji f należy punkt $P(\frac{\pi}{4}, -1)$,
 c) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -2; 2 \rangle$,
 d) wartość największa funkcji f jest równa 4?
5. Dana jest funkcja $f(x) = k \sin(x + \frac{\pi}{6})$. Dla jakich wartości parametru k :
- a) spełniona jest równość $f(\frac{\pi}{6}) = 3 - f(\frac{2\pi}{3})$,
 b) do wykresu funkcji f należy punkt symetryczny do $P(\frac{\pi}{3}, 5)$ względem osi OX ,
 c) zbiór wartości funkcji f jest przedziałem o długości 3,
 d) wartość najmniejsza funkcji f jest równa -6 ?

6. Ustal graficznie liczbę rozwiązań podanego równania należących do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$.

a) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - 1$ c) $3 \operatorname{tg} x - 2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4})$
 b) $2 - 3 \cos x = 2 \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ d) $2 \operatorname{ctg} x + 2 = \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{2})$

7. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = 3 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{3}{2}$, gdzie $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$, i odczytaj z niego:

- a) miejsca zerowe funkcji f ,
 b) przedziały monotoniczności funkcji f ,
 c) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

8. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -2 \cos(\frac{\pi}{3} - x)$, gdzie $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$, i odczytaj z niego:

- a) zbiór wartości funkcji f ,
 b) przedziały monotoniczności funkcji f ,
 c) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

Test jednokrotnego wyboru

9. Punkt $P(\pi, 10)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a \cos(x - \frac{\pi}{6})$ dla:
 A. $a = -20$, B. $a = -\frac{20\sqrt{3}}{3}$, C. $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, D. $a = 20$.
10. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}a \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$ o dziedzinie $D = (-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6})$ jest przedział $(-\infty; -\sqrt{3})$, jeśli:
 A. $a = -6$, B. $a = -3$, C. $a = 3$, D. $a = 6$.
11. Dana jest funkcja $f(x) = n \sin x$, gdzie $x \in (\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3})$. Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych dodatnich n , dla których funkcja f przyjmuje jedynie wartości mniejsze od 9. Ile liczb należy do zbioru A ?
 A. 10 B. 9 C. 8 D. 6

Zestaw II

12. Ustal, ile rozwiązań należących do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$ ma podane równanie w zależności od wartości parametru m .

$$m^2 \cos(x + \frac{2\pi}{3}) = 2m + 1 - \cos(x + \frac{2\pi}{3})$$

13. Do rozwiązania równania $2 \sin x = x^2$ użyjemy funkcji pomocniczych $f(x) = 2 \sin x$ i $g(x) = x^2$ (zob. rysunek). Wykresy tych funkcji przecinają się w punktach o odciętych x_1 i x_2 . Wartość x_1 możemy wyznaczyć dokładnie: $x_1 = 0$, a wartość x_2 bez przeprowadzenia dodatkowych obliczeń możemy jedynie oszacować:

$$x_2 \in (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}).$$

Znajdź rozwiązanie podanego równania. Wyznacz jego dokładną wartość lub – jeśli to niemożliwe – podaj jej oszacowanie.

a) $-\frac{1}{2} \cos x = x$ b) $\frac{3}{2} \sin x = 2x - \frac{\pi}{2}$ c) $2 \sin x - 1 = |x - \frac{\pi}{6}|$

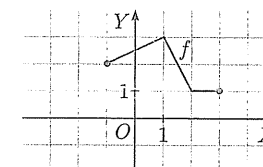
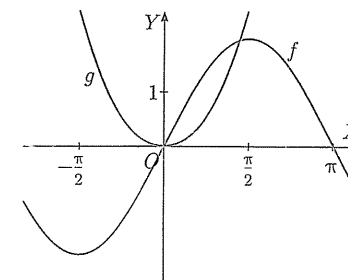
14. Dana jest funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 4$, określona na przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ wzorem $f(x) = x^2$. Podaj miejsca zerowe funkcji g należące do przedziału $\langle 0; 10 \rangle$.

a) $g(x) = 2f(x) - 8$ b) $g(x) = -3f(x - 1)$ c) $g(x) = -2f(x + 1) - 3$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f .

Naskicuj wykres funkcji h , jeśli:

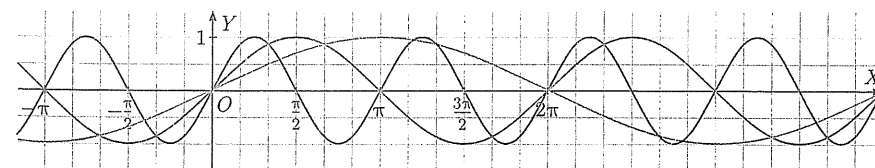
- a) $h(x) = 3 - 2g(x)$, $g(x) = f(x + 1)$,
 b) $h(x) = g(2 - x)$, $g(x) = 3f(x) - 4$,
 c) $h(x) = -g(x) + 2$, $g(x) = 2f(1 - x)$.



*3.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$ i $h(x) = \sin \frac{x}{2}$. Dopasuj do każdej z nich odpowiedni wykres. Podaj okres podstawowy i miejsca zerowe każdej z funkcji.



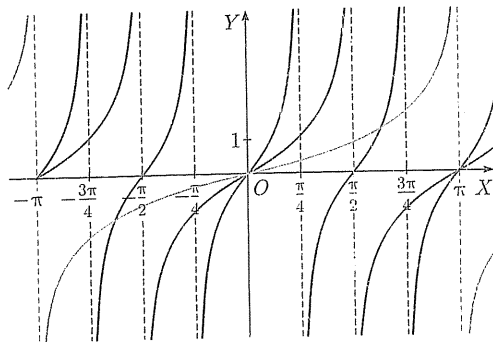
2. Podaj okres podstawowy i miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \sin 3x$ e) $f(x) = \cos 2x$
 b) $f(x) = \sin \frac{x}{4}$ f) $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2}$
 c) $f(x) = -\sin \frac{2x}{3}$ g) $f(x) = 2 \cos 4x$
 d) $f(x) = 2 \sin \pi x$ h) $f(x) = -\cos \frac{x}{4}$

3. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin 2(x + \pi)$ d) $f(x) = -4 \sin(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8})$
 b) $f(x) = \cos 2(x - \frac{\pi}{2})$ e) $f(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
 c) $f(x) = 2 \cos(3x - \pi)$ f) $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{2} - \pi x)$

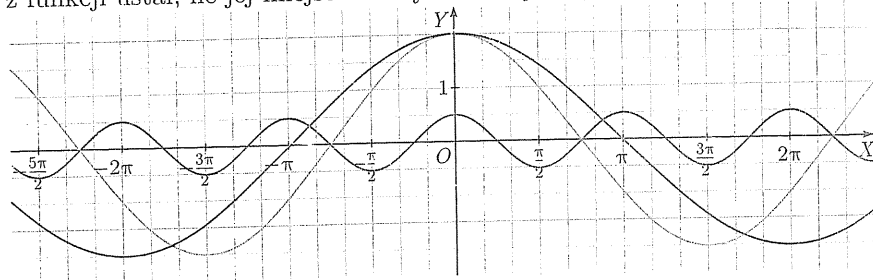
4. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{tg} 2x$ i $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Dopasuj do każdej z nich odpowiedni wykres. Podaj okres podstawowy i miejsca zerowe każdej z funkcji.



5. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe z przedziału $(-\pi; \pi)$.

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ b) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ c) $f(x) = -\operatorname{ctg}(2x - \pi)$

6. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2 \cos \frac{2x}{3}$, $g(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$ i $h(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$. Dopasuj do każdej z nich odpowiedni wykres. Dla każdej z funkcji ustal, ile jej miejsc zerowych należy do przedziału $(10\pi; 15\pi)$.



7. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązanie?

a) $f(x) = -\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{2})$ d) $f(x) = 1 - \sin(\frac{2}{3}\pi - 2x)$
 b) $f(x) = 2 \operatorname{tg}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2})$ e) $f(x) = 1 - 2 \cos(\pi - \frac{x}{3})$
 c) $f(x) = 1 + \operatorname{tg} \frac{2x+\pi}{4}$ f) $f(x) = 2 + \operatorname{ctg} \frac{\pi(1-x)}{2}$

Test jednokrotnego wyboru

8. Okres podstawowy funkcji $f(x) = 2 \sin(\frac{3}{4}\pi x - \frac{\pi}{6})$ jest równy:

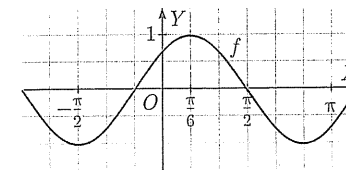
A. 2, B. $\frac{3}{4}\pi$, C. $2\frac{2}{3}$, D. $\frac{4}{3}\pi$.

9. Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = 4 \cos \frac{x}{10}$ w przedziale $\langle 0; 15 \rangle$?

A. 0 B. 4 C. 6 D. 8

10. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin(Ax + B)$. Iloczyn $A \cdot B$ może być równy:

A. $\frac{3}{8}\pi$, B. $\frac{5}{8}\pi$, C. $\frac{3}{4}\pi$, D. $\frac{5}{4}\pi$.



Zestaw II

11. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości najmniejszą i największą, o ile istnieją.

a) $f(x) = \sin(x + |x|)$
 b) $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2(|x| - x)$
 c) $f(x) = \frac{|x|}{x} + \operatorname{tg} \frac{x-|x|}{2}$

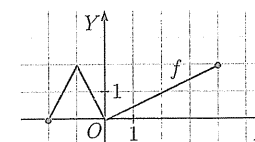
12. Funkcja g każdej liczbie $\alpha \in (0; \pi)$ przyporządkowuje sumę pierwiastków równania:

$$\frac{1}{4}x^2 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) \cdot x - 1 = 0.$$

Naskicuj wykres tej funkcji i odczytaj z niego, dla jakiego argumentu α funkcja g przyjmuje największą wartość. Wyznacz pierwiastki równania odpowiadające temu argumentowi α .

13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej na przedziale $\langle -2; 4 \rangle$. Podaj dziedzinę funkcji g i naskicuj jej wykres, jeśli:

a) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$, b) $g(x) = f(4x)$.



14. Długość ramienia trójkąta równoramiennego wynosi 2. Wykaż, że pole tego trójkąta można opisać wzorem $P(\alpha) = 2 \sin(\pi - 2\alpha)$, gdzie α jest miarą kąta przy podstawie.

a) Podaj dziedzinę funkcji P i naszkicuj jej wykres.

b) Dla jakiej wartości α pole trójkąta jest największe? Oblicz obwód trójkąta o największym polu.

15. Podaj dziedziny funkcji $g(x) = f(2x)$ i $h(x) = f(\frac{1}{2}x)$ oraz naszkicuj ich wykresy, jeśli:

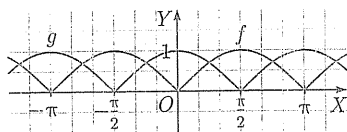
$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 2 \rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (2; 6) \end{cases}$$

*3.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = |\sin x|$ i $g(x) = |\cos x|$. Naszkicuj wykres funkcji h i podaj jej okres podstawowy, jeśli:

- a) $h(x) = |\sin(x - \pi)|$,
b) $h(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|$,
c) $h(x) = |\cos(x - \frac{2}{3}\pi)|$.



2. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = |2 \sin x|$ d) $f(x) = |1 - 2 \cos(-x)|$
b) $f(x) = |2 \sin x - 1|$ e) $f(x) = 2 \cdot |\sin(-x)| + 1$
c) $f(x) = |3 \cos x - 3|$ f) $f(x) = 3 \cdot |\cos x| - 3$

3. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

- a) $f(x) = 3 \cdot |\sin 2x|$ d) $f(x) = -|\cos(3x + \frac{\pi}{2})|$
b) $f(x) = -|\sin \frac{x}{2}|$ e) $f(x) = |\sin(2x - \pi)| - 2$
c) $f(x) = 2 \cdot |\cos \frac{x}{2}|$ f) $f(x) = -|\cos 2\pi x| + 1$

4. Podaj dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

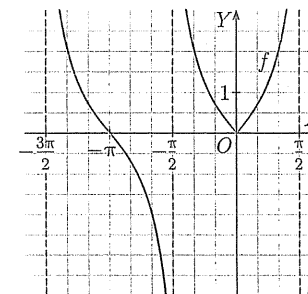
- a) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + 1$ b) $f(x) = |\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})|$ c) $f(x) = -2|\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})|$

5. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązanie?

- a) $f(x) = |\operatorname{tg} 2x|$
b) $f(x) = |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| - 1$
c) $f(x) = -|\operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{2})|$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} |x|$. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie? Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność w przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$, jeśli:

- a) $g(x) = \operatorname{tg} |x| - 1$,
b) $g(x) = \operatorname{tg} |x - \frac{3}{2}\pi|$,
c) $g(x) = -\operatorname{tg} |\frac{\pi}{2} - x|$.



7. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = \sin |x| + 1$ d) $f(x) = \operatorname{tg} |\frac{\pi}{4} - 2x|$
b) $f(x) = -\sin |2x| + 2$ e) $f(x) = -\operatorname{tg} |\frac{x}{2}| + 1$
c) $f(x) = 2 \cos |\frac{x}{2}| - 3$ f) $f(x) = \operatorname{ctg} |\pi x|$

8. Podaj zbiór wartości funkcji f .

- a) $f(x) = 4 \sin |x|$ d) $f(x) = 7 - \cos |3x|$
b) $f(x) = 4 \cdot |\sin(x - \pi)|$ e) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 4$
c) $f(x) = 5 \cdot |\cos \frac{x}{2}| - 3$ f) $f(x) = 2\sqrt{\sin^2 x - 5}$

Test jednokrotnego wyboru

9. Ile jest liczb całkowitych w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$, dla których funkcja $f(x) = \sin |x| - \frac{1}{2}$ przyjmuje wartości dodatnie?

A. 12 B. 9 C. 8 D. 4

10. Ile miejsc zerowych w przedziale $(-\pi; \pi)$ ma funkcja $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + 1$?

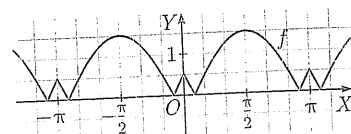
A. 0 C. 8
B. 4 D. nieskończenie wiele

11. Funkcją okresową nie jest funkcja:

- A. $f_1(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$, C. $f_3(x) = \cos |x|$,
B. $f_2(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$, D. $f_4(x) = \sin |x|$.

Zestaw II

12. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 5 \rangle$. Wyznacz a i b .
 a) $f(x) = a \cdot |\sin x| + b$ b) $f(x) = a \cos |3x - \pi| + b$
13. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości najmniejszą i największą, o ile istnieją.
 a) $f(x) = 2 \cos x - |\cos x|$ c) $f(x) = |\sin x| + \sin |x|$
 b) $f(x) = |\sin x| - \sin x$ d) $f(x) = \operatorname{tg} |x| - |\operatorname{tg} x|$
14. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego rozwiązania równania $f(x) = 1$.
 a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\cos x}$ b) $f(x) = \frac{\sin |x|}{\cos x}$



15. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = ||2 \sin x| - \frac{1}{2}|$. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ należących do przedziału $(-\pi; \pi)$ w zależności od wartości parametru m .

16. Niech $g(m)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $|\sin |x| - 1| = m$ należących do przedziału $(-2\pi; 2\pi)$. Naskicuj wykres funkcji g .

17. Naskicuj wykres funkcji f .
 a) $f(x) = |\sin x + 2 \cdot |\sin x||$
 b) $f(x) = |\operatorname{tg} |x| - 1|$
 c) $f(x) = ||\operatorname{ctg} x| + 2|$

*3.11. Tożsamości trygonometryczne

Zestaw I

1. Wyznacz wartości zmiennej x , dla których podane wyrażenie ma sens. Wykaż, że dla tych x jest ono równe 1.
 a) $\frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2 x-1}$ b) $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ c) $\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{1-2\sin^2 x \cos^2 x}$

2. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Wyznacz wartości zmiennej x , dla których podana równość ma sens.

a) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1 + \cos x$ c) $\frac{\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x}{\sin x \cos x} = 1$
 b) $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ d) $\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{2}{\cos x}$

3. Wyznacz wartości zmiennej x , dla których podane wyrażenie ma sens. Wykaż, że dla tych x jest ono równe $\sin x \cos x$.

a) $\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)^2$ b) $\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)$

4. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Wyznacz wartości zmiennej x , dla których podana równość ma sens.

a) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{ctg} x)$ d) $\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x = \cos x$
 b) $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x}$ e) $\sin x + \sin x \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\cos x \operatorname{tg} x}$
 c) $\cos x + \cos x \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos x}$ f) $\frac{\cos x + \operatorname{tg} x \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$

5. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Wyznacz wartości zmiennej x , dla których podana równość ma sens.

a) $(\operatorname{tg}^2 x + 1) \cos^2 x = 1$ d) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}$
 b) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{1-2\sin^2 x}{\sin x \cos x}$ e) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$
 c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2 \cos^2 x - 1$ f) $\frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg} x)^2$

6. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .

a) $\sin x = \frac{1}{3}, x \in (0; \frac{\pi}{2})$ d) $\operatorname{tg} x = -7, x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
 b) $\sin x = -\frac{1}{3}, x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ e) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}, x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$
 c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}, x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ f) $\operatorname{tg} x = 1, x \in (2\pi; \frac{5}{2}\pi)$

7. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x , jeśli:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ i $\operatorname{tg} x < 0$, b) $\operatorname{tg} x = 2$ i $\sin x > 0$.

Test jednokrotnego wyboru

8. Tożsamością trygonometryczną jest wyrażenie:

A. $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \cos x$, C. $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x$,
 B. $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \cos^2 x$, D. $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin^2 x$.

9. Jeśli $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$, to:

- A. $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, C. $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5+\sqrt{5}}$,
B. $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5-\sqrt{5}}$, D. $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

10. Jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ i $\operatorname{tg} \alpha = -2,4$, to:

- A. $\sin^2 \alpha - \cos \alpha = \frac{209}{169}$, C. $\sin^2 \alpha - \cos \alpha = \frac{160}{169}$,
B. $\sin^2 \alpha - \cos \alpha = \frac{204}{169}$, D. $\sin^2 \alpha - \cos \alpha = \frac{144}{169}$.

Zestaw II

11. Oblicz, wiedząc, że $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

- a) $\sin x \cdot \cos x$ c) $\sin^3 x + \cos^3 x$
b) $\sin^4 x + \cos^4 x$ d) $|\sin x - \cos x|$

12. Przekształć podane wyrażenie, wykorzystując tylko funkcję $\sin x$, i oblicz jego wartość dla $\sin x = \frac{2}{3}$.

- a) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$
b) $\frac{\cos x + \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} - \frac{1}{\cos^2 x}$
c) $\frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\sin x \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$

13. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Wyznacz wartości zmiennej x , dla których podana równość ma sens.

- a) $\frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^6 x$
b) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 1$

14. Sprawdź, czy podana zależność jest tożsamością.

- a) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$ i $y \neq \frac{k\pi}{2}$ i $x + y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{C}$
b) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 y}$, $x \neq k\pi$ i $y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{C}$

15. Oblicz, wiedząc, że $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$.

- a) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$ b) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ c) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x|$

16. Przekształć podane wyrażenie, wykorzystując tylko funkcję $\operatorname{tg} x$, i oblicz jego wartość dla $\operatorname{tg} x = 4$.

- a) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ b) $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ c) $\frac{1}{1 - \sin^4 x - \cos^4 x}$

*3.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Zestaw I

1. Korzystając ze wzorów podanych w ramce obok, oblicz sinus i cosinus sumy i różnicy kątów α i β .

- a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$
b) $\alpha = 180^\circ$, $\beta = 60^\circ$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

2. Oblicz.

- a) $\cos 135^\circ$ c) $\cos(-195^\circ)$ e) $\sin(-\frac{5}{3}\pi)$ g) $\sin 1155^\circ$
b) $\sin 165^\circ$ d) $\cos 105^\circ$ f) $\cos(-\frac{11}{12}\pi)$ h) $\cos(-465^\circ)$

3. Oblicz.

- a) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ$ c) $\sin \frac{1}{12}\pi \sin \frac{3}{4}\pi - \cos \frac{1}{12}\pi \cos \frac{3}{4}\pi$
b) $\sin 111^\circ \cos 66^\circ - \cos 111^\circ \sin 66^\circ$ d) $\cos \frac{4}{3}\pi \cos \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi \sin \frac{2}{3}\pi$

4. Oblicz $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$, jeśli:

- a) $\sin \alpha = 0,6$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, $\cos \beta = 0,4$ i $\beta \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$,
b) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ i $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, $\operatorname{tg} \beta = -2$ i $\beta \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.

5. Wykaż, że podana zależność jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

- a) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ d) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
b) $\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ e) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha}$
c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ f) $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} = 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$

6. Oblicz $\sin 2\alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli:

- a) $\cos 2\alpha = 0,8$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, b) $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

7. Oblicz $\sin 4\alpha$, jeśli:

- a) $\cos 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$, b) $\operatorname{tg} \alpha = -3$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.

8. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

- a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
 b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$
 c) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$
 d) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

Test jednokrotnego wyboru

9. Tożsamością trygonometryczną jest wyrażenie:

- A. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$, C. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$,
 B. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$, D. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

10. Która z podanych zależności nie jest tożsamością trygonometryczną?

- A. $\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$ C. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
 B. $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha$ D. $\cos 3\alpha = -4 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos \alpha$

11. Jeśli cosinus kąta ostrego α jest równy $\frac{1}{3}$, to:

- A. $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, B. $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, C. $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, D. $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Zestaw II

12. Sprawdź, czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną.

- a) $\frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\cos^3 x - \cos 3x} = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 b) $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \sin 2x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 c) $1 + 2 \cos x + \cos 2x = 4 \cos x \cos^2 \frac{x}{2}$
 d) $\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} = \frac{\cos(45^\circ + x)}{\cos(45^\circ - x)}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$

13. Oblicz $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$, jeśli:

- a) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ i $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$, b) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

14. Oblicz $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{tg} 2\alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ i $300^\circ < \alpha < 330^\circ$.

15. Wyznacz $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, jeśli $\operatorname{tg} \alpha = a$ i $\operatorname{tg} \beta = b$. Korzystając z otrzymanych wzorów, oblicz:

- a) $\operatorname{tg} 15^\circ$, b) $\operatorname{tg} 75^\circ$, c) $\operatorname{tg} 105^\circ$.

16. Oblicz $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$, jeśli $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 6$.

17. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

$$2 \operatorname{tg}(45^\circ + 2\alpha) = (2 + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha) \operatorname{tg} 4\alpha$$

18. Drabina oparta o parapet okna na pierwszym piętrze tworzy z powierzchnią ziemi kąt α . Jeśli oprze się drabinę o parapet okna na parterze, to kąt nachylenia drabiny będzie równy β , a jej dolny koniec cofnie się o p metrów. Wykaż, że odległość d między parapetami okien, wyrażona w metrach, wynosi:

$$d = p \cdot \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha}.$$

Oblicz d dla $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ i $p = 3$ m.

*3.13. Wzory redukcyjne

Zestaw I

1. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\sin \frac{7}{6}\pi$ d) $\cos \frac{5}{4}\pi$ g) $\operatorname{tg}(-\frac{7}{4}\pi)$
 b) $\cos \frac{11}{6}\pi$ e) $\cos(-\frac{5}{3}\pi)$ h) $\operatorname{ctg}(-\frac{9}{4}\pi)$
 c) $\cos \frac{4}{3}\pi$ f) $\operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi$ i) $\sin(-\frac{23}{6}\pi)$

2. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\cos 135^\circ$ e) $\cos 900^\circ$ i) $\operatorname{ctg} 1020^\circ$
 b) $\cos 240^\circ$ f) $\sin 1200^\circ$ j) $\cos(-315^\circ)$
 c) $\sin 150^\circ$ g) $\operatorname{tg} 600^\circ$ k) $\operatorname{tg}(-780^\circ)$
 d) $\sin 330^\circ$ h) $\sin(-1125^\circ)$ l) $\operatorname{ctg}(-1050^\circ)$

3. Wykaż, że podana liczba jest równa zero.

- a) $\sin 10^\circ + \cos 100^\circ$ d) $\cos 40^\circ - \cos 320^\circ$
 b) $\sin 20^\circ + \sin 200^\circ$ e) $\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 145^\circ$
 c) $\sin 85^\circ - \sin 95^\circ$ f) $\operatorname{ctg} 65^\circ - \operatorname{tg} 205^\circ$

4. Oblicz, wiedząc, że $\sin x = \frac{15}{17}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

- a) $\sin(\pi + x)$ b) $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ c) $\sin(\frac{3}{2}\pi + x)$ d) $\operatorname{tg}(2\pi - x)$

5. Oblicz, wiedząc, że $\cos x = -\frac{5}{13}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

- a) $\sin(\frac{7}{2}\pi + x)$ c) $\sin(x - \frac{7}{2}\pi)$ e) $\operatorname{tg}(\frac{11}{2}\pi + x)$
 b) $\cos(5\pi + x)$ d) $\cos(x - \frac{5}{2}\pi)$ f) $\operatorname{ctg}(x - \frac{13}{2}\pi)$

6. Oblicz.

- a) $\sin 1005^\circ \cdot \sin 15^\circ$ e) $\operatorname{ctg}(-\frac{7}{4}\pi) \cdot \operatorname{tg} \frac{11}{4}\pi + \operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi \cdot \cos \frac{7}{6}\pi$
 b) $2 \sin 330^\circ - 4 \cos 675^\circ$ f) $\operatorname{tg} \frac{23}{6}\pi \cdot \sin \frac{5}{2}\pi - \operatorname{ctg} \frac{13}{6}\pi \cdot \cos(-\frac{5}{3}\pi)$
 c) $\sin^2 135^\circ - 3 \cos^2 135^\circ$ g) $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{23}{6}\pi + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{17}{3}\pi$
 d) $\operatorname{tg}^2 405^\circ \cdot \operatorname{ctg} 330^\circ$ h) $\cos \frac{\pi}{9} \cdot \sin \frac{5}{18}\pi - \cos \frac{29}{18}\pi \cdot \sin \frac{2}{9}\pi$

7. Sprawdź, czy zachodzi podana równość.

- a) $\frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ} = 1$ c) $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 b) $\frac{\cos 40^\circ \cdot \sin 50^\circ \cos 60^\circ}{\cos 220^\circ \cdot \sin 230^\circ} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ}{\operatorname{ctg} 235^\circ \cdot \operatorname{tg} 400^\circ \cdot \operatorname{tg} 570^\circ} = \sqrt{3}$

8. Oblicz: $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$, wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ i $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

9. Oblicz: $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, jeśli:

- a) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, b) $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{4}$, c) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = \frac{3}{4}$.

10. Oblicz, wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- a) $\cos(\pi - \alpha)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2})$ e) $\operatorname{ctg}(\frac{21}{2}\pi + \alpha)$
 b) $\sin(\alpha - \frac{3}{2}\pi)$ d) $\cos(\frac{7}{2}\pi - \alpha)$ f) $\cos(\alpha - 7\pi)$

Test jednokrotnego wyboru

11. Wartość wyrażenia $\sin 300^\circ + \cos 600^\circ$ wynosi:

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, B. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, D. $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

12. Jeśli $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ i $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, to:

- A. $\sin(\frac{7}{2}\pi + \alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, C. $\sin(\frac{7}{2}\pi + \alpha) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$,
 B. $\sin(\frac{7}{2}\pi + \alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, D. $\sin(\frac{7}{2}\pi + \alpha) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

13. Dla dowolnego kąta α prawdziwa jest równość:

- A. $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = 0$, C. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = 0$,
 B. $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = 0$, D. $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = 0$.

Zestaw II

14. Oblicz, wiedząc, że $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}$ i $x \in (0; \frac{\pi}{4})$.

- a) $\sin(\pi + 2x)$
 b) $\sin^2(x - \frac{3}{2}\pi) - \cos^2(x - \frac{\pi}{2})$
 c) $\operatorname{tg}(9\pi - 2x)$

15. Sprawdź, czy podana liczba jest większa od $\frac{1}{2}$.

- a) $8 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ c) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 70^\circ$
 b) $4 \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 80^\circ$ d) $\operatorname{ctg} 80^\circ \cdot \frac{2 \sin^2 25^\circ - 1}{\sin 320^\circ}$

16. Sprawdź, czy podana zależność jest tożsamością.

- a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{2}{\cos(2x - \frac{\pi}{2})}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 b) $\frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) + 1} = 1 - \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$ i $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

*3.14. Równania trygonometryczne (1)

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin 3x = 1$ d) $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ g) $2 \cos(2x - \pi) = -1$
 b) $\sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 1$ e) $\cos 2x = -1$ h) $\sqrt{3} \cos(\frac{\pi-x}{4}) = \frac{3}{2}$
 c) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i) $\sqrt{2} \sin \frac{\pi(x-1)}{2} = -1$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $\operatorname{tg} 4x = 1$ c) $\operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ e) $\operatorname{ctg}(-2x) = 1$
 b) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$ d) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -1$ f) $\operatorname{ctg}(3x - \pi) = -\sqrt{3}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin^2 2x = 1$ c) $4 \cos^2(x + \frac{\pi}{3}) = 3$ e) $|\sqrt{2} \sin \pi x| = 1$
 b) $2 \cos^2 4x = 1$ d) $\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2} + \pi) = 3$ f) $|3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - x)| = \sqrt{3}$

4. Wyznacz największą liczbę ujemną, która należy do zbioru rozwiązań podanego równania.

- a) $|2 \cos(2x - \frac{\pi}{4})| = \sqrt{2}$ b) $|\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}| = 1$ c) $|\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{6})| = \sqrt{3}$

5. Rozwiąż równanie. Wypisz jego rozwiązania z przedziału $\langle 2\pi; 3\pi \rangle$.

a) $\sin^2 x = 5 \sin x$ c) $\cos^3 x = -4 \cos x$ e) $\operatorname{tg}^3 2x = \operatorname{tg} 2x$
 b) $2 \cos^2 x = \sqrt{2} \cos x$ d) $\operatorname{tg}^3 x = 3 \operatorname{tg} x$ f) $8 \sin^4 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$

6. Rozwiąż równanie.

a) $\cos x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 0$ b) $\sin 4x \cdot |\operatorname{tg} 2x - 1| = 0$ c) $\frac{\cos(3x + \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg} x} = 0$

Test jednokrotnego wyboru

7. Ile rozwiązań równania $\sin(6x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ należy do przedziału $\langle \frac{1}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$?
 A. 8 B. 6 C. 4 D. 3

8. Jednym z rozwiązań równania $\operatorname{tg}(\frac{x}{6} - \pi) = -\sqrt{3}$ jest liczba z przedziału:
 A. $\langle -7; -6 \rangle$, B. $\langle -6; -5 \rangle$, C. $\langle -5; -4 \rangle$, D. $\langle -4; -3 \rangle$.

9. Suma rozwiązań równania $\cos(\pi x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ należących do przedziału $\langle 0; 4 \rangle$ wynosi:
 A. $8\frac{2}{3}$, B. $9\frac{1}{3}$, C. $10\frac{2}{3}$, D. $11\frac{1}{3}$.

Zestaw II

10. Dla jakich wartości parametru a równanie $8 \sin 2x = a - 1$ ma dwa pierwiastki należące do przedziału $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$? Wyznacz te pierwiastki dla $a = 5$.

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $2 \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 1 = 0$.

$$2 \sin x (\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0$$

$$(\cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x + 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 2 \sin x - 1 = 0$$

Równanie $\cos x = -1$ jest spełnione dla $x = (2k + 1)\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, a równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ - dla $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$. Są to wszystkie rozwiązania równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 x \cos x + 5 = \cos x + 5 \sin^2 x$ c) $\sin 2x - \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin x - 1$
 b) $\operatorname{tg} x - 2 \sin x = 2 - \frac{1}{\cos x}$ d) $\cos 2x = 1 + 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$

12. Dane jest równanie $x^2 - x + m = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz m , wiedząc, że pierwiastki tego równania są wartościami funkcji sinus i cosinus pewnego kąta α . Oblicz te pierwiastki i wyznacz miarę kąta α .

*3.15. Równania trygonometryczne (2)

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin^2 x - 3 \sin x = -1$ e) $\sin x = \cos 2x$
 b) $2 \cos^2 x - 7 \cos x = 4$ f) $\sin^2 x + \cos 2x = 2 - \cos x$
 c) $2 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x = 2$ g) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
 d) $4 \sin^2 x = 8 \cos x - 1$ h) $3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\pi - x) = 4\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 5x - \sin 4x = 0$ d) $\sin 3x = \cos(5x + \frac{\pi}{2})$
 b) $\sin 7x + \sin(3x + \pi) = 0$ e) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$
 c) $\cos 4x + \cos 2x = 0$ f) $\sin 3x = \cos 2x$

3. Wypisz rozwiązania podanego równania z przedziału $(0; \pi)$.

a) $\sin x - \sin 5x = 2 \cos 3x$ c) $\cos x + \cos 2x = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2}$
 b) $\cos 3x - \cos x = \sqrt{2} \sin x$ d) $\sin x + \sin 7x = \sin(\pi - 4x)$

4. Rozwiąż równanie, korzystając z zależności $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ b) $\sin(2x + \frac{5}{6}\pi) + \cos 2x = \frac{3}{2}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$ e) $\sin^2 x + \cos x \sin x = \operatorname{tg} x$
 b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ f) $\operatorname{tg} 2x - \sin 2x = 2 \sin^2 x$
 c) $2 \sin x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$ g) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$
 d) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ h) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$

6. Wyznacz największą liczbę z przedziału $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ spełniającą podane równanie.

a) $3 \operatorname{tg} x = 2 \cos x$ c) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \cos 2x$
 b) $1 - \cos 2x = \operatorname{tg} x$ d) $2 \cos^2 2x - 3 \sin 2x = 0$

7. Rozwiąż równanie.

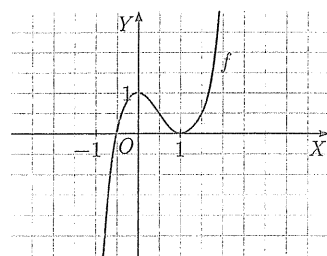
a) $\sin^2 2x + 6 \sin^2 x = 6$ b) $2 \sin^2 2x + 3 \cos 2x = 0$

8. Korzystając z wykresu funkcji

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

przedstawionego na rysunku obok, rozwiąż równanie:

$$2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0$$



9. Znajdź pierwiastki wielomianu $w(t) = 4t^3 - 3t + 1$, a następnie rozwiąż równanie $4 \sin^3 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

Test jednokrotnego wyboru

10. Równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ ma ten sam zbiór rozwiązań co równanie:
- A. $2 \cos^2 x - \cos x = 0$, C. $2 \cos^2 x + \cos x = 0$,
 B. $2 \sin^2 x - \sin x = 0$, D. $2 \sin^2 x + \sin x = 0$.
11. Wskaż równanie sprzeczne.
- A. $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$ C. $\sin^2 x - 5 \sin x - 6 = 0$
 B. $\sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$ D. $\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$
12. Największą liczbą ujemną spełniającą równanie $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ jest:
- A. $-\frac{7}{4}\pi$, B. $-\frac{3}{4}\pi$, C. $-\frac{\pi}{4}$, D. $-\frac{\pi}{8}$.

Zestaw II

13. Rozwiąż równanie.
- a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$ d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 2 \cos 2x$
 b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$ e) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 4x$
 c) $\cos 3x = 2(1 + \cos 2x)$ f) $\operatorname{ctg} x - \cos x = 1 - \sin x$
14. Rozwiąż równanie.
- a) $\cos x = 1 - \sin \frac{x}{2}$
 b) $\sin x - \sin 2x = 1 - \cos x$
 c) $1 + \sin x = \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
15. Wyznacz najmniejszą liczbę dodatnią spełniającą podane równanie.
- a) $\sin x + \cos x = \cos 2x$ b) $\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2} = \sin x$

16. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 1}$

b) $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 4$

c) $\frac{\operatorname{tg} 2x - \cos x}{\cos x} = 2 \sin x$

d) $\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

17. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{\sin 4x}{4}$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

c) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$

18. Wyznacz wartości parametru t , dla których równanie

$$\cos 2x - \sin x + t = 0$$

ma rozwiązanie. Rozwiąż równanie dla $t = -1$.

19. Znajdź rozwiązania podanego równania należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \cdot |\sin x| = \frac{1}{4}$ b) $\sin x \cdot |\operatorname{tg} x| = \frac{3}{2}$ c) $\operatorname{ctg} x \cdot |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

*3.16. Nierówności trygonometryczne

Zestaw I

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2 \cos x < -\sqrt{3}$

e) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

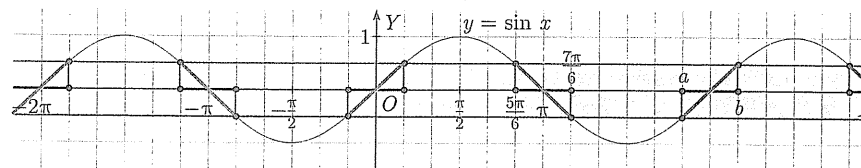
d) $\cos x > -1$

f) $\operatorname{tg} x \leq -1$

2. Na wykresie funkcji sinus zaznaczono zbiór rozwiązań nierówności $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$:

$$x \in \left\langle \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle \cup \langle a + 2k\pi, b + 2k\pi \rangle,$$

gdzie $k \in \mathbb{C}$. Podaj liczby a i b .



W podobny sposób rozwiąż nierówność.

a) $|\sin x| > \frac{1}{2}$

c) $|\sin x - 1| < 1$

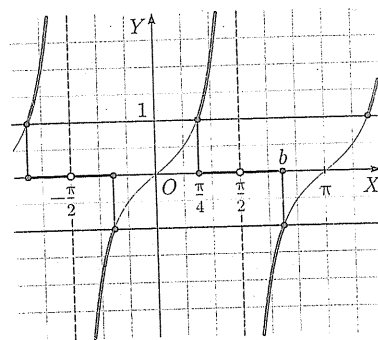
b) $2|\sin x| < \sqrt{3}$

d) $|2 \sin(-x) + 1| > 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin^2 x \geq 1$ b) $4\cos^2 x < 3$ c) $|\cos 2x| < 1$ d) $|6\cos \frac{x}{2}| \geq 3\sqrt{2}$

4. Na wykresie funkcji tangens zaznaczono zbiór rozwiązań nierówności $|\operatorname{tg} x| \geq 1$:
 $x \in \langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle \cup (\frac{\pi}{2} + k\pi; b + k\pi)$,
 gdzie $k \in \mathbb{C}$. Wyznacz b .
 Rozwiąż nierówność.



a) $|\operatorname{tg} x| < 1$
 b) $|2\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| > \sqrt{3}$

5. Rozwiąż nierówność, jeśli $x \in (0; \pi)$.

a) $2\sin 2x < 1$ d) $2\sin^2 \frac{x}{2} - 1 < 0$
 b) $2\cos 2x > -\sqrt{3}$ e) $|\cos(x - \frac{\pi}{2})| > \cos \frac{\pi}{4}$
 c) $\operatorname{tg}^2 2x - 3 > 0$ f) $|\operatorname{ctg}(\pi - x)| \leq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$

6. Narysuj wykresy odpowiednich funkcji i odczytaj z nich rozwiązania nierówności zawarte w przedziale $(0; \pi)$.

a) $\sin x \leq \operatorname{tg} x$ b) $\sin 2x \geq \cos x$ c) $|\cos x| > \sin x$

7. Dla jakich wartości parametru α miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{x}{4\sin(\pi - 3\alpha)} + 1$ należy do przedziału $(-2; 0)$?

Test jednokrotnego wyboru

8. Nierówność $\sin x > \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ jest spełniona dla $x \in (\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{11}{12}\pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{C}$. Zatem nierówność $\sin x \geq \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ jest spełniona dla:

A. $x \in \langle -\frac{11}{12}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{12} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{C}$,
 B. $x \in \langle \frac{11}{12}\pi + 2k\pi; \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{C}$,
 C. $x \in \langle \frac{13}{12}\pi + 2k\pi; \frac{23}{12}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{C}$,
 D. $x \in \langle \frac{25}{12}\pi + 2k\pi; \frac{35}{12}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{C}$

9. Ile liczb z przedziału $\langle 0; 20 \rangle$ nie spełnia nierówności $|\cos x| < 1$?

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

10. Najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geq \sqrt{3}$ jest:

A. 1, B. 2, C. 3, D. 4.

Zestaw II

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż nierówność $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 > 0$.

Podstawiamy $t = \sin x$ i otrzymujemy nierówność $2t^2 + 5t - 3 > 0$, skąd

$$t < -3 \quad \text{lub} \quad t > \frac{1}{2}.$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\sin x < -3 \quad \text{lub} \quad \sin x > \frac{1}{2}.$$

Nierówność $\sin x < -3$ nie ma rozwiązań. Zbiorem rozwiązań nierówności $\sin x > \frac{1}{2}$ jest suma przedziałów $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{C}$ – jest to rozwiązanie wyjściowej nierówności.

Rozwiąż nierówność.

a) $2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x > 2$ c) $5\cos x \leq 4 + \cos 2x$
 b) $3\sin x + 2\cos^2 x > 3$ d) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x < 3$

12. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x + |\sin x| > 1$ b) $2\cos x + |\cos x| \leq 1,5$ c) $|\sin x| \cdot \cos x \geq \frac{1}{2}$

13. Dla jakich wartości parametru α należących do przedziału $(0; \pi)$ równanie $(2\cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos \alpha = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

14. Dane jest równanie $x^2 + 4x\sin \alpha + 2\cos 2\alpha = 0$. Dla jakich wartości parametru α ma ono dwa różne pierwiastki, a suma ich kwadratów jest większa od 8?

15. Rozwiąż nierówność, jeśli $x \in (0; \pi)$.

a) $2\sin^2 x + \sin^2 2x < 2$ c) $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$
 b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x > 2\sqrt{3}$ d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 4\sin 2x$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Dany jest punkt $P(3, 3\sqrt{3})$. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , którego ramię końcowe przechodzi przez punkt P' , jeżeli:
 - P' jest symetryczny do P względem osi OX ,
 - P' jest symetryczny do P względem osi OY ,
 - P' jest symetryczny do P względem punktu $O(0, 0)$,
 - P' jest środkiem odcinka OP .
- Oblicz.

a) $\sin(-855^\circ)$	c) $\operatorname{tg} 570^\circ$	e) $\sin \frac{25}{4}\pi$	g) $\operatorname{tg}(-\frac{51}{4}\pi)$
b) $\cos 2490^\circ$	d) $\operatorname{ctg}(-450^\circ)$	f) $\cos(-\frac{37}{6}\pi)$	h) $\operatorname{ctg} \frac{13}{6}\pi$
- Oblicz.

a) $\sin 150^\circ - 2 \cos 240^\circ$	d) $3(\cos \frac{4}{3}\pi + \sin \frac{11}{6}\pi)$
b) $\frac{\operatorname{tg} 405^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-225^\circ)}{\sin 315^\circ \cdot \cos 135^\circ}$	e) $\frac{2 \sin \frac{7}{6}\pi + \cos(-\frac{5}{3}\pi)}{\operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi + \operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi}$
c) $\frac{(\sin(-315^\circ) + 3 \cos 45^\circ)^2}{2 \operatorname{tg} 120^\circ}$	f) $\frac{\operatorname{tg}(-\frac{7}{3}\pi) \cdot \sin \frac{8}{3}\pi}{\cos \frac{5}{4}\pi \cdot \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{6})}$
- Korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej, znajdź rozwiązania równania należące do podanego przedziału.

a) $\sin x = -\frac{1}{2}, \langle -2\pi; 2\pi \rangle$	c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \langle 0; 3\pi \rangle$
b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \langle -3\pi; 3\pi \rangle$	d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \langle -\pi; 2\pi \rangle$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości. Określ monotoniczność funkcji f w przedziale $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3})$.

a) $f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$	c) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{9} - x)$
b) $f(x) = 3 - \cos(x - \frac{2}{3}\pi)$	d) $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x $
- Wyznacz okres podstawowy funkcji f .

a) $f(x) = 4 \sin 3x$	b) $f(x) = 3 \cos 4x - 2$	c) $f(x) = -7 \operatorname{tg}(-2x)$
-----------------------	---------------------------	---------------------------------------
- Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle,$	c) $\operatorname{tg} \alpha = -2, \alpha \in \langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \rangle,$
b) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \alpha \in \langle \pi; \frac{3}{2}\pi \rangle,$	d) $\operatorname{ctg} \alpha = 3, \alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle.$

- Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$, jeśli:
 - $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$, $\operatorname{tg} \beta = -1$ i $\beta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$,
 - $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ i $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{3}$ i $\beta \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$.
- Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 1$	c) $\frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} + \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{\cos x}$
b) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$	d) $\frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}$
- Rozwiąż równanie.
 - $\cos(2x - \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $2(\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 1) = -1$
 - $-3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - 2x) = \sqrt{3}$
- Oblicz sumę pierwiastków równania $4 - 6 \sin(x - \frac{2}{3}\pi) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi) - 3$ należących do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.
- Rozwiąż równanie.

a) $\cos 2x = 3 \cos^2 x$	d) $\cos x \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \cos x$
b) $\sin 2x = \sqrt{2} \sin x$	e) $\sin^2(x + \frac{\pi}{3}) + \sin^2(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
c) $\operatorname{tg} 2x = \sin 2x$	f) $1 - \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x - 1$
- Sprawdź, czy podana równość zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.
 - $1 + \operatorname{ctg}^2 x (\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x) = \cos^2 x$
 - $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x - 1)$
- Rozwiąż równanie.

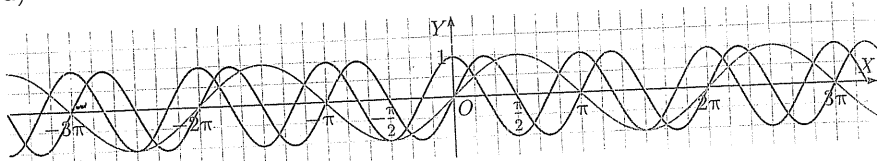
a) $\cos 3x - \sin 3x = 1$	d) $\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$
b) $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$	e) $\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos 3x + \sin x$
c) $\cos 7x = \cos 4x - \cos x$	f) $\sin(\frac{3}{2}\pi + x) = \cos 2x$
- Rozwiąż równanie.

a) $\sin(\frac{\pi}{4} + x) - \sin(\frac{3}{4}\pi - 2x) = 0$	b) $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) + \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$
--	--
- Przedstaw wzór funkcji f w postaci $f(x) = a + b \cos(2x + c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, i podaj jej dziedzinę. Narysuj wykres tej funkcji i wyznacz rozwiązania nierówności $f(x) \leq \cos 2x$ dla $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.

a) $f(x) = 2 \sin^2 x$	b) $f(x) = \cos^2 x$	c) $f(x) = \frac{2}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$
------------------------	----------------------	--

17. Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy trzech funkcji: $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos 2x$ oraz $h(x) = \sin x$. Dopasuj do każdej z nich odpowiedni wykres. Odczytaj z rysunku rozwiązanie podanej nierówności dla $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$.

a) $\sin x > \sin 2x$ b) $\cos 2x \leq \sin x$



18. Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązanie?
- a) $f(x) = 1 - \sin |2x|$ b) $f(x) = |\operatorname{tg} 3x| - 5$ c) $f(x) = \frac{2}{|\sin x - 3|}$

Zestaw II

19. Oblicz.

a) $\sin 1000^\circ - \cos 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$ d) $\sin^2 \frac{11}{8}\pi - \sin^2 \frac{\pi}{8}$
 b) $\cos 50^\circ + \cos 70^\circ - \cos 10^\circ$ e) $\cos \frac{5}{12}\pi \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3}{8}\pi$
 c) $\cos 36^\circ + \cos 108^\circ$ * f) $\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi$

20. Uzasadnij podaną równość.

a) $\frac{\sin 59^\circ + \sin 49^\circ - \sin 23^\circ - \sin 13^\circ}{\cos 5^\circ} = 1$ * c) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2}{5}\pi = 5$
 b) $\frac{2 \sin 80^\circ \cdot \sin 170^\circ + \sin 20^\circ}{4 \cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ} = 1$ * d) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{9}\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{4}{9}\pi = \sqrt{3}$

21. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x$ c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$
 b) $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ d) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

22. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{\cos x} - \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \operatorname{tg} x \sin(x + \frac{\pi}{4})$
 b) $\frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

23. Oblicz $\sin 2x$ i $\cos 2x$, jeśli $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ i $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = -2 \cos x$.

24. Oblicz, wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4})$.

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos \alpha - \sin \alpha$ c) $\operatorname{tg} 2\alpha$

25. Oblicz $\sin 3\alpha$ i $\cos 3\alpha$, jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.

26. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$ d) $\sin x \cos 2x - \sin x = \frac{1}{2} \sin 4x - \sin 2x$
 b) $\cos^4 x + \cos^4(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ e) $\cos x \sin 2x = \sin x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 3x$
 c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \cos x + \sin x$ f) $\sin 2x - 2 \operatorname{ctg} x \cos^2 x = 2 \cos 2x$

27. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle -\pi; \pi \rangle$ wielomian

$$w(x) = x^3 \sin \alpha + 3x^2 \cos^2 \alpha + 2x \sin^2 \alpha - 1$$

jest podzielny przez dwumian $x - 1$?

28. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x + \sin x = \cos 3x + \cos x$ b) $\sin x + \sin 2x = -\sin 3x$

29. Podaj największy ujemny pierwiastek równania

$$|2 \sin(\frac{\pi - 2x}{4}) - 1| = 1.$$

30. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 x - 3 \cos x = 3$ d) $\operatorname{tg}^2 x + \cos 2x = 1$
 b) $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin x - 1$ e) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$
 c) $\sin x \cos 2x = \sin 2x - \frac{3}{2} \sin x$ f) $3 \sin^2 x + \cos 2x = 2 \sin^3 x$

31. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $2 \cos^3 x - \cos^2 x = 2 \cos x - 1$ b) $\cos x + |\cos x| = \sin 2x$

32. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej wartości najmniejszą i największą.

a) $f(x) = \sin x + \cos x$ c) $f(x) = \cos^2 x + |\sin x| \cdot \sin x$
 b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{ctg} x + \sin 2x$

33. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos 2x$, której dziedziną jest przedział $(0; 2\pi)$.

34. Dla jakich wartości parametru a podane równanie ma rozwiązanie?

a) $\sin x + \sin(x - \frac{2}{3}\pi) = a^2 - 1$ b) $\cos x - \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 2a$

35. Dla jakich wartości parametru α należących do przedziału $(0; \pi)$ podane równanie ma dwa różne pierwiastki?

- a) $x^2 \sin \alpha + 2x(\sin \alpha - 1) = \sin(-\alpha)$
b) $(2 \cos \alpha - 1) \cdot x^2 + 1 = 2x$

36. Dla jakich wartości parametru α należących do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$ równanie

$$x^2 + 2\sqrt{3} \cos \alpha \cdot x + \cos 2\alpha = 0$$

ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $2|x_1 x_2| > 1$?

37. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle -\pi; \pi \rangle$ najmniejsza wartość funkcji

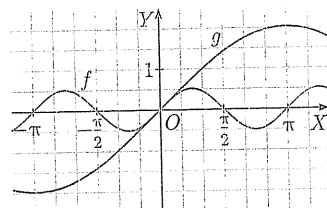
$$f(x) = x^2 - 4x - 4(\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha)$$

jest równa -1 ?

38. Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma rozwiązanie?

- a) $f(x) = 2 \sin x \cdot |\cos x|$
b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| \cdot \cos^2 x$
c) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$

39. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ i $g(x) = 2 \sin \frac{1}{2}x$. Wykaż, że jedynym wspólnym miejscem zerowym tych funkcji w przedziale $(-2\pi; 2\pi)$ jest $x = 0$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.



Zestaw III

40. Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci.

- a) $\frac{1}{\sin(-2430^\circ)} \cdot (a \sin 1530^\circ + ab \cos(-1710^\circ) - b \operatorname{tg} 1035^\circ) \cdot (ab^2 \sin 1260^\circ + a \operatorname{ctg}(-315^\circ) + b \cos^2 1350^\circ)$
b) $2 \sin^2 \frac{15\pi}{4} - 2x^3 \cos(-\frac{26\pi}{3}) + \sqrt{3}x^2 \operatorname{tg} \frac{37\pi}{3} + x \operatorname{ctg}^2(-\frac{41\pi}{6})$

41. Oblicz $\operatorname{tg}(x+y)$ i $\operatorname{tg}(x-y)$, jeśli:

- a) $\operatorname{tg} x = 4$ i $\operatorname{ctg} y = -3$,
b) $\sin x = -\frac{3}{5}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$, $\cos y = -\frac{5}{13}$ i $y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

42. Udowodnij tożsamość trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

- a) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ c) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$
b) $\frac{2}{\sin 2x} + 2 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ d) $\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin 2x} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

43. Sprawdź, czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną.

$$\frac{\cos(2y-x) - \sin(180^\circ + x)}{\sin(2y-x) + \cos(180^\circ + x)} = \operatorname{ctg}(y - 45^\circ),$$

gdzie $y - x \neq 45^\circ + k \cdot 180^\circ, y \neq 45^\circ + k \cdot 180^\circ$

44. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin(\pi - 3x) = 4 \sin x \cos 2x$
b) $1 - \cos 2x + \sin 2x = 2 \cos(x - 45^\circ)$
c) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{2}$
d) $2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 3 \sin^2 2x = 1$

45. Uzasadnij podaną równość.

$$\sin(x-y) + \sin(x-z) + \sin(y-z) = 4 \cos \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x-z}{2} \cdot \cos \frac{y-z}{2}$$

46. Dla jakich wartości parametru a równanie $\operatorname{tg}^3 x - 1 = a(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x)$ ma dokładnie dwa pierwiastki należące do przedziału $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$?

47. Uzasadnij wzory w ramce. Oblicz $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, jeśli $\sin x - \cos x = \frac{7}{5}$.

Dla $x \neq \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

48. Zapisz $\sin 2x$, wykorzystując tylko funkcję $\operatorname{tg} x$, i rozwiąż podane równanie.

$$(3 \operatorname{tg} x + 1)(1 + \sin 2x) = 1 - \operatorname{tg} x$$

49. Rozwiąż nierówność, jeśli $x \in (0; \pi)$.

- a) $4 \sin^3 x > \cos 2x$ c) $\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} > \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{3}$
b) $\operatorname{tg} 2x < 2 \sin x$ d) $\frac{1 - 2 \cos x}{\cos x} < 0$

50. Wyznacz zbiór wartości funkcji f o dziedzinie $D = \langle 0; 2\pi \rangle$.

- a) $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$ b) $f(x) = \cos 2x + 5 \sin x + 7$

51. Rozwiąż nierówność, jeśli $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \cdot |\operatorname{tg} x| \leq \frac{3}{2}$ b) $\sqrt{\sin^2 x - \sin x} \geq \cos x$

52. Rozwiąż nierówność, jeśli $x \in (0; 2\pi)$.

a) $|\cos x| \leq \frac{\cos x}{|x-5|}$ b) $\frac{2-3\cos x}{1-4\cos^2 x} > 1$

53. Wyznacz $\cos 2x$, jeśli $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} 2x + \frac{5}{4}$.

54. Wykaż, że jeśli α, β i γ są miarami kątów w trójkącie, to zachodzi związek:

a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$,
 b) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$,
 c) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$.

55. Liczby a, b, c, d należą do zbioru $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4\}$ i spełniają warunek $a < b < c < d$.

a) Wyznacz a, b, c i d .
 b) Wykaż, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = 4x^3 - 3x + b$.

56. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{\sin^2 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)}$.

57. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?

a) $f(x) = \frac{2 \sin x + 1}{\sin x}$ b) $f(x) = \sin^2 x - \sin x \cos x$

58. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x + (1 - \sin \alpha)y = 1 \\ (2 \sin \alpha + 1)x + (2 \sin \alpha)y = \sin \alpha \end{cases}$$

jest para liczb przeciwnych znaków?

59. Dany jest układ równań z niewiadomymi x i y oraz parametrem α .

$$\begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1 \end{cases}$$

- a) Wykaż, że dla każdej wartości α układ ten jest oznaczony. Wyznacz jego rozwiązanie.
 b) Rozważmy funkcję f , która każdej rzeczywistej wartości α przyporządkowuje sumę kwadratów liczb x i y będących rozwiązaniem tego układu. Naskicuj wykres funkcji f i wyznacz jej zbiór wartości.

4. Ciągi

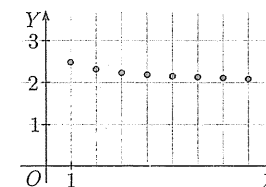
4.1. Pojęcie ciągu

Zestaw I

- Wypisz wszystkie wyrazy ciągu składającego się z kolejnych:
 - liczb dwucyfrowych podzielnych przez 12,
 - potęg liczby 2 mniejszych od 100 o wykładnikach naturalnych dodatnich,
 - cyfr liczby 1111²,
 - dzielników naturalnych liczby 120, zapisanych od najmniejszego do największego.
- Jako pierwsze dwa wyrazy ciągu (a_n) wybierz dwie dowolne liczby naturalne. Zapisz wyrazy: a_3, a_4, a_5 i a_6 , jeśli kolejne wyrazy tego ciągu, oprócz pierwszego i drugiego, powstają w wyniku:
 - dodania dwóch poprzednich wyrazów,
 - pomnożenia dwóch poprzednich wyrazów.
- Zapisz dowolne zdanie. Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to liczba liter kolejnych jego wyrazów. Wypisz wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , narysuj jego wykres oraz podaj wyraz największy i wyraz najmniejszy.

Test jednokrotnego wyboru

4. Na rysunku przedstawiono wykres ciągu (a_n) o wyrazach: $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, \dots$. Liczba wyrazów należących do przedziału $(2,01; 2,1)$ wynosi:
- A. 88, C. 90,
 B. 89, D. 91.



5. Wyrazy pewnego ciągu są kolejnymi liczbami trzycyfrowymi podzielnymi przez 3. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:
- A. 111, B. 114, C. 117, D. 121.

6. Jeśli n -ty wyraz ciągu (a_n) jest polem trójkąta równobocznego o boku długości n , to:
 A. $a_4 = 2\sqrt{3}$, B. $a_4 = 4\sqrt{2}$, C. $a_8 = 4\sqrt{3}$, D. $a_8 = 16\sqrt{3}$.

Zestaw II

7. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) , jeżeli mamy dany jego pierwszy wyraz, a każdy następny jest sumą sześcianów cyfr wyrazu poprzedniego.
 a) $a_1 = 3$ b) $a_1 = 18$ c) $a_1 = 24$
8. Wyrazy ciągu (a_n) są takimi kolejnymi liczbami naturalnymi, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3. Oblicz dwunasty wyraz tego ciągu, jeśli czwarty wyraz jest równy 23.
9. Podaj n -ty wyraz ciągu (a_n) , jeśli opisuje on:
 a) liczbę pierwiastków równania $x^2 - 6x + n^2 = 0$,
 b) liczbę przekątnych n -kąta wypukłego.

4.2. Sposoby określania ciągu

Zestaw I

1. Wypisz pierwszych sześć wyrazów ciągu (a_n) , jeśli jego n -ty wyraz jest:
 a) sumą n początkowych liczb naturalnych dodatnich,
 b) iloczynem n początkowych liczb naturalnych dodatnich.
2. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
 a) $a_n = 2n + 5$ d) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ g) $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2} + \frac{1}{n}$
 b) $a_n = n(2n + 1)$ e) $a_n = (-2)^n$ h) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n}$
 c) $a_n = n^3 - n$ f) $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$ i) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$
3. Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu. Podaj ósmy wyraz ciągu określonego tym wzorem.
 a) 11, 22, 33, 44, 55, ... e) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \dots$
 b) -5, 5, -5, 5, -5, 5, ... f) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \dots$
 c) 1, 8, 27, 64, 125, ... g) 1, 11, 111, 1111, ...
 d) 1, 6, 11, 16, 21, 26, ... h) 1, 21, 321, 4321, ...

4. Wypisz pięć początkowych wyrazów dodatnich ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 3 - n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

$$\text{b) } a_n = \begin{cases} (n-1)^3 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n(n-2) & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero?

$$a_n = \begin{cases} n^2 - 7n + 10 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ (n^2 - 4)(n - 3) & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

6. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

$$\text{a) } a_n = n^2 - 10n + 9 \qquad \text{b) } a_n = n^2 - 4n - 8$$

7. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od wyrazów ciągu (b_n) ?

$$\text{a) } a_n = n(n-5), b_n = \frac{n}{n+5} \qquad \text{b) } a_n = 2n+6, b_n = (n^2-9)(n-5)$$

8. Wypisz dziewięć początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{1}{4}(2n+1+(-1)^n)$ i ciągu $b_n = a_{n+1}$.

9. Wypisz wszystkie wyrazy ciągu skończonego (a_n) : $m, m+1, m+2, \dots, 2m$, dla $m = 3, 4$ i 5 . Podaj dwa środkowe wyrazy tego ciągu dla $m = 13$.

Test jednokrotnego wyboru

10. Liczba 15 jest wyrazem ciągu określonego wzorem:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } a_n = 4n - 2, & \text{C. } a_n = 7 - 3n, \\ \text{B. } a_n = \frac{5n}{n+2}, & \text{D. } a_n = n(n+2). \end{array}$$

11. Wskaż wzór ciągu, który ma dokładnie pięć wyrazów nieujemnych.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } a_n = n - 6 & \text{C. } a_n = 4 + 3n - n^2 \\ \text{B. } a_n = 5(-1)^n + n & \text{D. } a_n = (n-1)(n-4)(7-n) \end{array}$$

12. Wykres ciągu (a_n) zawiera się w prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 2$. Jeśli $a_4 = -2$, to:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } a_n = -3n + 2, & \text{C. } a_n = 3n - 10, \\ \text{B. } a_n = -3n, & \text{D. } a_n = -3n + 10. \end{array}$$

13. Zbiór wartości ciągu (a_n) jest dwuelementowy, jeśli:

- A. $a_n = (-2)^n$,
 B. $a_n = \operatorname{tg} \frac{n\pi}{3}$,
 C. $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2}$,
 D. $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$.

Zestaw II

14. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie wielomianu $f(x) = ax(x-3)(x-5)$ (rysunek obok). Wyznacz współczynnik a , podaj wzór ciągu (a_n) i ustal, które jego wyrazy są większe od 120.

15. Naszkicuj wykres ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = f(n)$. Które wyrazy tego ciągu są większe od 1?

- a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ b) $f(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$

16. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie paraboli. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego ósmy wyraz, jeśli:

- a) wierzchołek paraboli ma współrzędne $W(3, 9)$ oraz $a_1 = 5$,
 b) parabola przecina oś OX w punktach -2 i 4 oraz $a_6 = 8$.

17. Naszkicuj wykres ciągu (a_n) . Wyznacz największy wyraz tego ciągu.

- a) $a_n = 6n - 5 - n^2$ b) $a_n = 16 + 4n - n^2$ c) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$

18. Uzasadnij, że ciąg: $\frac{19}{95}, \frac{199}{995}, \frac{1999}{9995}, \frac{19999}{99995}, \dots$ jest ciągiem stałym.

4.3. Ciągi monotoniczne (1)

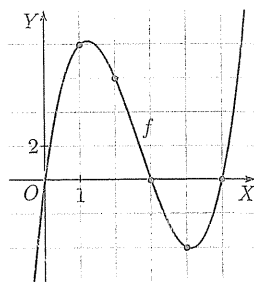
Zestaw I

1. Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

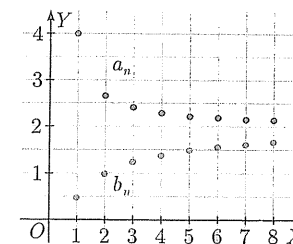
- a) $a_n = 2n - 50$ b) $a_n = 1 - \frac{2}{n}$ c) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$

2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

- a) $a_n = 10 - n^2$ b) $a_n = 2 + \frac{5}{n}$ c) $a_n = -3 + \frac{1}{n^2}$



3. Na rysunku obok przedstawiono wykresy ciągów $a_n = \frac{4n}{2n-1}$ i $b_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący, a ciąg (b_n) – rosnący.



4. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rosnący, czy malejący.

- a) $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ c) $a_n = \frac{2n-4}{3n+5}$
 b) $a_n = \frac{4-n}{n+2}$ d) $a_n = \frac{2-3n}{3-4n}$

5. Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

- a) $a_n = (n-4)^2$ b) $a_n = -n^2 + 3n + 3$ c) $a_n = n^2 - 6n - 7$

6. Wstaw w miejsce: x, y, z takie liczby całkowite, aby powstały ciąg był niemalejący.

- a) $3, 5, x, y, z, 5, 6, 7$
 b) $-7, -7, x, y, z, -6, -4, -2$
 c) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, x, y, z, 3, 4$

7. Podaj przykład sześćoelementowego nierosnącego ciągu (a_n) takiego, że:

- a) $a_1 = a_3 = 4, a_5 = 3$,
 b) $a_3 = 0, a_5 = -1$,
 c) $a_2 = a_4 = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{3}$.

8. Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = -n^2 + 3n - 2$
 b) $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)$
 c) $a_n = \sin n\pi$

9. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = 3n^2 - 2n$ d) $a_n = \frac{n-3n^2}{n^2+5}$
 b) $a_n = n - \frac{1}{n}$ e) $a_n = (n-1)(n-2) + 1$
 c) $a_n = \frac{3n+1}{n^2}$ f) $a_n = 6n - 2 - 3^n$

10. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

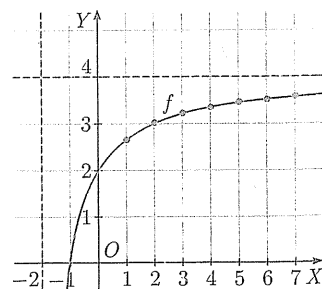
- a) $a_n = (-1)^n + 5$ c) $a_n = |n-1|$
 b) $a_n = (-1)^n + 2n$ d) $a_n = |9-n^2|$

Test jednokrotnego wyboru

11. Wykres ciągu rosnącego może być zawarty w prostej:
 A. $y = 1 - x$, C. $y = 10 - \sqrt{2}x$,
 B. $y = \frac{-x+8}{2}$, D. $y = 5x - 1$.
12. Ciąg $a_n = \frac{k-2}{k+1}n^2 - 1$ jest malejący, jeśli:
 A. $k \in (-\infty; -1)$, C. $k \in (2; \infty)$,
 B. $k \in (-1; 2)$, D. $k \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.
13. Jeśli (a_n) jest ciągiem rosnącym, to rosnący jest też ciąg (b_n) o wzorze:
 A. $b_n = \frac{-a_{n+1}}{2}$, C. $b_n = a_{n+1} + a_n$,
 B. $b_n = a_{n+1} - a_n$, D. $b_n = a_{n+1} \cdot a_n$.

Zestaw II

14. Ciąg (a_n) jest malejący. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) .
 a) $b_n = 3a_n - 2$ b) $b_n = \frac{1}{7}a_n + 10$ c) $b_n = -5a_n + 2$
15. Ciąg (a_n) jest rosnący. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) .
 a) $b_n = a_{2n}$ b) $b_n = \frac{1}{4}a_{2n+1}$ c) $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$
16. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg $b_n = |a_n|$ jest rosnący.
 b) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg $b_n = |a_n|$ nie jest monotoniczny.
 c) Czy z tego, że ciąg $b_n = (a_n)^2$ jest rosnący wynika, że ciąg (a_n) jest rosnący?
17. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji $f(x) = \frac{kx+4}{x+2}$ (rysunek obok).



- a) Wyznacz wartość współczynnika k i podaj wzór ciągu (a_n) .
 b) Zbadaj monotoniczność ciągów określonych wzorami: $b_n = a_{n+2}$ i $c_n = \frac{1}{a_n}$.

18. a) Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = -\frac{n+2}{n+1}$ i ciągu $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$.
 b) Wyrazy ciągu (a_n) są ujemne. Wykaż, że jeśli ciąg ten jest rosnący, to ciąg $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ jest malejący.
19. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest malejący?
 a) $a_n = \frac{n+k}{n+1}$ b) $a_n = \frac{5-n}{kn}$
20. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest monotoniczny?
 a) $a_n = \frac{(k-1)n+2}{k}$ b) $a_n = (n+2)(n-k)$ *c) $a_n = n^3 + kn$

*4.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Zestaw I

1. Dany jest ciąg (a_n) . Oblicz pięć początkowych wyrazów tego ciągu.
 a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$ dla $n \geq 1$ c) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 4a_n + n \end{cases}$ dla $n \geq 1$
 b) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 10 \end{cases}$ dla $n \geq 1$ d) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = na_n^2 - 1 \end{cases}$ dla $n \geq 1$
2. Dany jest ciąg (a_n) . Wyznacz x , jeśli $a_2 + a_5 = 9$.
 a) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2 \end{cases}$ dla $n \geq 1$
 b) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^{n-1} \end{cases}$ dla $n \geq 1$
3. Określ ciąg (a_n) rekurencyjnie, korzystając z różnicy $a_{n+1} - a_n$.
 a) $a_n = 5n - 1$ c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$
 b) $a_n = 4 - 3n$ d) $a_n = n^2 - 2n$
4. Określ ciąg (a_n) rekurencyjnie, korzystając z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 a) $a_n = 3 \cdot 4^n$ c) $a_n = \frac{-5}{2^n}$
 b) $a_n = 2 \cdot (-1)^n$ d) $a_n = \sqrt{n+2}$

5. Dopasuj wzór rekurencyjny ciągu do podanego wzoru ogólnego.

A. $a_n = 3n - 2$

C. $a_n = n^2$

B. $a_n = 4^{n-1}$

D. $a_n = \frac{3}{2} \cdot (-1)^n + \frac{5}{2}$

I. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{(1-a_n)^2}{a_{n-1}} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

II. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = a_{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

III. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{16}{5}(a_{n-1} + a_n) \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

IV. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1} + 9) \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

6. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geq 1$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli:

a) $a_2 = -\frac{1}{2}$,

b) $a_3 = 1$,

c) $a_4 = 1\frac{1}{4}$.

7. Oblicz cztery pierwsze wyrazy ciągu (a_n) . Podaj przykład opisu rekurencyjnego tego ciągu.

a) $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$

b) $a_n = 2^n \cdot n!$

c) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

8. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Odgadnij wzór ogólny tego ciągu, a następnie go udowodnij.

a) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

b) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

Test jednokrotnego wyboru

9. Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy -3 oraz $a_4 - a_3 = 6$. Wówczas dla $n \geq 1$ wyrazy tego ciągu są określone wzorem:

A. $a_{n+1} = a_n^2 - 3$,

C. $a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n$,

B. $a_{n+1} = \frac{n-1}{3n+5}a_n$,

D. $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4n$.

10. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu (a_n) określone są wzorem: $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n + 5$. Wówczas $a_6 = 4$, jeśli:

A. $a_1 = -4$,

B. $a_1 = 1$,

C. $a_1 = 4$,

D. $a_1 = 20$.

11. Wskaż rekurencyjne określenie ciągu $a_n = 2^n - 1$.

A. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 1$

C. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

B. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 1$

D. $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

Zestaw II

12. Odgadnij wzór ogólny ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie, a następnie go udowodnij.

a) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = -3 \\ a_{n+1} = -2a_n + 3a_{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

b) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$

13. Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = k \\ a_2 = 3k \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 2$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wykaż, że dowolna nieparzysta wielokrotność liczby k jest wyrazem tego ciągu.

14. Ciąg (a_n) spełnia warunki: $a_3 = 3$, $a_5 = 6$ i $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 4$ dla $n \geq 1$. Oblicz siedemnasty wyraz tego ciągu.

15. Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera spełnia warunki: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ oraz dla $n \geq 2$:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Oblicz a_{100} .

16. Po roku od zasadzenia młode drzewo wypuściło pierwszą boczną gałąź. Każda gałąź, która ma co najmniej dwa lata, wypuszcza co roku młody boczny pęd. Ile gałęzi będzie miało to drzewo po pięciu latach od zasadzenia? Niech x_n oznacza liczbę rozgałęzień n -letniego drzewa. Podaj wzór rekurencyjny ciągu (x_n) .

*4.5. Ciągi monotoniczne (2)

Zestaw I

1. Uzasadnij własność podaną w ramce. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

Ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest:

- malejący, jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$,
- rosnący, jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

- a) $a_n = 4^n$ c) $a_n = 2 \cdot 5^n$ e) $a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$
b) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d) $a_n = \frac{4}{5^{2n}}$ f) $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n-1}$
2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = 2^n \cdot n!$ b) $a_n = \frac{n!}{3^n}$ c) $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$
3. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = -3 \cdot 2^n$ b) $a_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ c) $a_n = 5 \cdot (-3)^n$
4. Dane są ciągi $a_n = 2n+1$ i $b_n = n + \frac{1}{n}$. Zbadaj monotoniczność tych ciągów oraz monotoniczność ciągu $c_n = a_n + b_n$ i ciągu $d_n = b_n - a_n$.
5. Wykaż, że ciągi dane wzorami ogólnymi $a_n = 2^{-2n+1}$ i $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ są malejące. Zbadaj monotoniczność ciągu $c_n = a_n \cdot b_n$ i ciągu $d_n = \frac{a_n}{b_n}$.
6. Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym jest monotoniczny.
a) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}$ dla $n \geq 1$
b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \end{cases}$ dla $n \geq 1$
c) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n^2 \cdot a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$
d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$

Test jednokrotnego wyboru

7. Ciąg:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + k^2 - 4k \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$$

jest malejący, jeśli:

- A. $k \in (-\infty; 0)$, C. $k \in (4; \infty)$,
B. $k \in (0; 4)$, D. $k \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$.

8. Który z podanych ciągów jest rosnący?

- A. $a_n = \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^n$ C. $a_n = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^n$
B. $a_n = \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^n$ D. $a_n = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^n$

9. Dane są ciągi $a_n = 2^n$ i $b_n = n+1$. Który z podanych ciągów jest nierosnący?

- A. $c_n = a_n + b_n$ C. $c_n = b_n - a_n$
B. $c_n = a_n \cdot b_n$ D. $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Zestaw II

10. Wykaż, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, to ciąg (c_n) też jest rosnący.

- a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = 2^{a_n+b_n}$

11. Podaj przykład ciągów malejących (a_n) i (b_n) takich, że ciąg (c_n) jest rosnący.

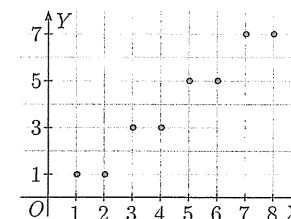
- a) $c_n = a_n - b_n$ b) $c_n = a_n \cdot b_n$ c) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

12. Wyrazy ciągu (a_n) spełniają dla $n \geq 1$ warunek $3a_{n+1} = n(2a_n - a_{n+1})$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu, jeśli $a_2 = 1$.

13. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

- a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{2k-1}{k+1} a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = (nk+2)a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$

14. Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = n - \frac{1+(-1)^n}{2}$. Wykaż, że różnica $a_{2n} - a_{2n-1}$ jest równa zero. Ustal znak różnicy $a_{2n+1} - a_{2n}$.



15. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2}$ b) $a_n = n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ c) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n} \cdot 3^{2n}$

16. Dla jakich wartości x ciąg $a_n = (\operatorname{tg} x)^{2n}$ jest rosnący?

17. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = -a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Oblicz sześć początkowych wyrazów tego ciągu. Uzasadnij, że ciąg (c_n) dany wzorem $c_n = a_n + 2n$ jest niemalejący.

4.6. Ciąg arytmetyczny (1)

Zestaw I

1. Wypisz cztery początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Oblicz wyrazy a_{10} i a_{20} .

a) $a_1 = 1, r = 2$ d) $a_1 = -6, r = 0$
 b) $a_1 = -5, r = 1$ e) $a_1 = 4, r = -2$
 c) $a_1 = 0, r = \frac{1}{2}$ f) $a_1 = 3\sqrt{2}, r = \sqrt{2}$

2. Oblicz piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego.

a) $-4, 1, 6, 11, 16, \dots$
 b) $2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots$
 c) $-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, \dots$

3. Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) i podaj jego wzór ogólny.

a) $a_1 = 4, a_4 = 7$ c) $a_1 = 5, a_{10} = 2\frac{3}{4}$
 b) $a_1 = -3, a_3 = 9$ d) $a_1 = -9, a_6 = 16$

4. Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r i podaj wzór ogólny tego ciągu.

a) $r = 2, a_3 = 5$ c) $r = \frac{1}{2}, a_7 = -4$
 b) $r = -3, a_5 = 0$ d) $r = \sqrt{3}, a_4 = 1 + 4\sqrt{3}$

5. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_6 .

a) $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_8 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 = 0 \\ a_8 = -12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_{10} = -1 \\ a_{16} = 2 \end{cases}$

6. Wyznacz takie liczby:

a) x i y , aby liczby: $3, x, y, 15$ tworzyły w podanej kolejności ciąg arytmetyczny,
 b) x, y i z , aby liczby: $4, x, y, z, 50$ tworzyły w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

7. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.

a) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_3 = \frac{5}{a_4} + 2 \end{cases}$

8. Wyznacz x , jeśli podane liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego.

a) $-2, 2 + x, 4 + x^2$ b) $2x - 3, 3x - 5, \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

9. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?

10. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli:

a) ich suma jest równa 1, a suma trzech początkowych liczb wynosi zero.
 b) różnica ciągu jest równa 1, a iloczyn trzech ostatnich liczb wynosi -60 .

Test jednokrotnego wyboru

11. Ile wyrazów ma ciąg arytmetyczny, którego pierwszy i ostatni wyraz są równe odpowiednio 3 i 8,2, a różnica wynosi 0,4?

A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

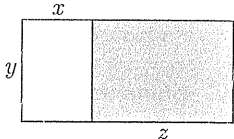
12. Liczby: $3, x - 2, x + 1$ są odpowiednio pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego, jeśli:

A. $x = -6$, B. $x = 3\frac{1}{4}$, C. $x = 6$, D. $x = 8$.

13. Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, a dziewiąty wyraz wynosi -12 . Dwunasty wyraz tego ciągu jest równy:

A. 21, B. -18 , C. -21 , D. -24 .

Zestaw II

14. Trzeci, piąty i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) są równe odpowiednio: 4, 10 i 40. Oblicz a_1 i wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.
15. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów wynosi 56. Wyznacz te liczby.
16. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli:
- różnica tego ciągu jest równa 2, a iloczyn wszystkich liczb wynosi -15 ,
 - suma dwóch pierwszych liczb jest równa 4, a suma dwóch ostatnich wynosi -28 .
17. Prostokąt o polu 72 cm^2 podzielono na dwa prostokąty w taki sposób, że pole jednego z nich jest dwa razy większe od pola drugiego (rysunek obok). Oblicz długości boków: x, y, z , wiedząc, że tworzą one ciąg arytmetyczny.
- 
18. Prostokątną działkę, przylegającą dłuższym bokiem do rzeki, ogrodzono z trzech stron siatką o łącznej długości 30 m. Oblicz powierzchnię tej działki, jeśli jej szerokość, długość i przekątna tworzą ciąg arytmetyczny.
19. Obwód trójkąta prostokątnego wynosi $3p$. Wyznacz długości boków tego trójkąta, jeśli tworzą one ciąg arytmetyczny.
20. Studnia ma kształt prostopadłościanu o objętości 48 m^3 . Oblicz jej wymiary, jeśli tworzą one ciąg arytmetyczny o różnicy 2 m.
21. Pierwszego dnia rajdu kolarz przejechał 100 km, a każdego następnego dnia przejeżdżał o 5 km mniej niż poprzedniego dnia. Ile dni trwał rajd, jeśli kolarz pokonywał średnio 90 km dziennie?

4.7. Ciąg arytmetyczny (2)

Zestaw I

- Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny i określ jego monotoniczność.
 - $a_n = 4n - 3$
 - $a_n = -\frac{1}{2}n + 6$
 - $a_n = \frac{5n-1}{4}$
 - $a_n = 2 - \sqrt{3}n$
- Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
 - $a_n = n^2 + 1$
 - $a_n = 3 - \pi n$
 - $a_n = \sqrt{5n-1}$
 - $a_n = \frac{n^2-4}{n+2}$
 - $a_n = n(n-1)(n-2) + 5$
 - $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$
- Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy. Uzasadnij, że jest to ciąg arytmetyczny.
 - $y = 5x - 4$
 - $y = -3x + 1$
 - $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$
- Punkty A i B należą do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i narysuj jego wykres. Które wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od zera?
 - $A(1, -3), B(4, 3)$
 - $A(1, 3), B(2, 2)$
 - $A(3, 1), B(5, -2)$
- Które wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r należą do przedziału $(-10; 10)$?
 - $a_1 = -15, r = 4$
 - $a_1 = -20, r = 6$
 - $a_1 = 3\sqrt{2}, r = -\sqrt{2}$

Test jednokrotnego wyboru

- Wykres ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r jest zawarty w prostej $y = 4x + 3$. Wynika stąd, że:
 - $a_1 = 4, r = 3$,
 - $a_1 = 4, r = 7$,
 - $a_1 = 7, r = 4$,
 - $a_1 = -10, r = 4$.
- Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 1, a suma wyrazów czwartego i siódmego wynosi 12,5. Wykres tego ciągu jest zawarty w prostej:
 - $y = -\frac{3}{2}x + 4$,
 - $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$,
 - $y = \frac{3}{2}x - 2$,
 - $y = 3x - 5$.

8. Wykres ciągu arytmetycznego (a_n) jest zawarty w prostej prostopadłej do prostej $y = 2x - 3$. Jeśli $a_6 = 2$, to:

A. $a_1 = -8$,
B. $a_1 = -1$,
C. $a_1 = 4,5$,
D. $a_1 = 12$.

9. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) . Ciągiem arytmetycznym nie jest ciąg:

A. $b_n = 5a_n - 3$,
B. $b_n = \frac{3a_n - 1}{2} + 1$,
C. $b_n = \frac{a_n + 6}{3} + 2n$,
D. $b_n = a_n + n^2$.

Zestaw II

10. Suma dwóch początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa -6 , suma dwóch ostatnich wyrazów wynosi 66 , a piąty wyraz tego ciągu jest równy 11 . Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu i podaj równanie prostej, w której zawiera się jego wykres.

11. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wynosi 15 , a suma trzech kolejnych jest równa -3 . Wyznacz wzór ogólny ciągu (b_n) , którego wyrazami są kolejne wyrazy ciągu (a_n) o numerach:

a) nieparzystych, b) parzystych.

12. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r . Sprawdź, czy ciąg (b_n) też jest arytmetyczny. Jeśli tak, podaj jego różnicę r' i pierwszy wyraz.

a) $b_n = a_{2n}$ b) $b_n = a_{2n-1} + n$ c) $b_n = 5a_{n+1}^2 - 5a_n^2$

13. Dane są ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) . Wykaż, że ciąg (c_n) też jest arytmetyczny.

a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = \frac{4a_n - \sqrt{2}b_n}{3}$ c) $c_n = a_{2n-1} + 3b_n + 5$

14. Dla jakich wartości k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i malejący?

a) $a_n = (k^2 + 2k - 1)n + 2$
b) $a_n = \frac{k^2 - 1}{k + 2}(n - 1) + 5$
c) $a_n = \frac{kn + 1}{(k^2 - 1)n^2 + 2}$

15. Ciąg (a_n) jest określony jest rekurencyjnie:

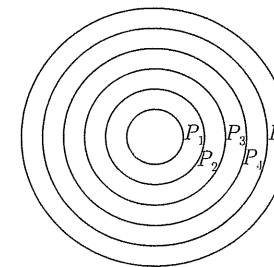
$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$$

Uzasadnij, że jest to ciąg arytmetyczny rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.

16. Na rysunku przedstawiono fragment nieskończonego ciągu kół współśrodkowych, których promienie:

$$x, x + 1, x + 2, \dots$$

tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że pola $P_1, P_2, P_3, \dots$ kolejnych pierścieni również tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz x , jeśli $P_{15} = 35\pi$.



17. Udowodnij podaną równość, jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach różnych od zera.

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

18. a) Wykaż, że jeśli cyfry liczby trzycyfrowej tworzą ciąg arytmetyczny, to liczba ta jest podzielna przez 3 .
b) Wyznacz liczby trzycyfrowe podzielne przez 15 , których cyfry tworzą ciąg arytmetyczny.

4.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Zestaw I

1. Oblicz sumy S_9 i S_{18} danego ciągu arytmetycznego.

a) $1, 3, 5, 7, \dots$ b) $5, 2, -1, -4, \dots$ c) $-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 4, \dots$

2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

a) $a_1 = -2, r = 3$ c) $a_1 = 1,5, r = -0,1$
b) $a_1 = 4, r = -5$ d) $a_1 = 1 - \sqrt{2}, r_1 = \sqrt{2}$

3. Ustal, ile wyrazów ma podany ciąg arytmetyczny, i oblicz ich sumę.

a) $4, 7, 10, \dots, 34$ c) $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, \dots, 9\frac{2}{3}$
b) $-3, -5, -7, \dots, -41$ d) $-17, -15, -13, \dots, 17$

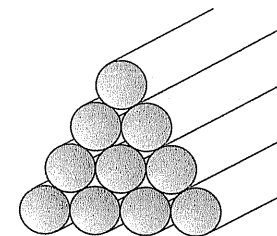
4. Oblicz sumę wszystkich liczb:
- naturalnych zawartych w przedziale (50; 150),
 - nieparzystych zawartych między 10 a 1010,
 - dwucyfrowych parzystych.
5. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia:
- przez 4 jest równa 1,
 - przez 3 jest równa 2.
6. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1 lub 4.
7. Oblicz sumę wszystkich liczb:
- zawartych między 60 a 160, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 2 lub 3,
 - większych od 90 i mniejszych od 290, których reszta z dzielenia przez 4 jest nieparzysta,
 - dwucyfrowych, które nie są podzielne jednocześnie przez 2 i 3.
8. Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz $S_5 + S_{10}$.
- $\begin{cases} a_5 = 6 \\ a_{11} = 15 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_3 \cdot a_7 = 1 \\ a_8 - 3a_4 = 2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1^2 + a_3^2 = 8 \\ \frac{a_6}{a_4} = 2 \end{cases}$
9. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r . Wyznacz największą wartość n , dla której $S_n < 100$.
- $a_1 = 4, r = 8$
 - $a_1 = -5, r = 5$
 - $a_1 = 1, r = \sqrt{2}$
10. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, jeśli suma jego n początkowych wyrazów wyraża się wzorem:
- $S_n = 4n - 5n^2,$
 - $S_n = 3n + 1,$
 - $S_n = 2n^2 - 1,$
 - $S_n = 6n.$

Test jednokrotnego wyboru

11. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $-10, -6, -2, \dots$ wynosi 320 dla:
- $n = 14,$
 - $n = 16,$
 - $n = 18,$
 - $n = 20.$

12. Suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 4 lub 9 wynosi:
- 1773,
 - 1719,
 - 1665,
 - 1611.
13. Równanie $12x - x^2 = 0,3 + 0,5 + 0,7 + \dots + 3,7$ jest spełnione dla:
- $x = 6,$
 - $x = 4,$
 - $x = 3,$
 - $x = -6.$

14. Rury w kształcie walca o średnicy zewnętrznej 14 cm ułożono w stosy (rysunek obok). W każdej kolejnej warstwie stosu jest o jedną rurę mniej niż w poprzedniej warstwie. Jeśli dolna warstwa stosu ma szerokość 3,5 m, to ile co najwyżej pełnych stosów można ułożyć z 1000 rur?
- 1
 - 2
 - 3
 - 4



Zestaw II

15. Rozwiąż równanie.
- $1 + 4 + 7 + \dots + x = 210$
 - $(1 + x) + (3 + x) + (5 + x) + \dots + (25 + x) = 130$
 - $(1 + x) + (5 + 2x) + (9 + 3x) + \dots + (61 + 16x) = -48$
16. Podaj wzór ogólny i zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
- $a_n = \frac{4+8+12+\dots+4n}{n+2}$
 - $a_n = \frac{6+12+18+\dots+6n}{n^2}$
 - $a_n = \frac{3+7+11+\dots+(4n-1)}{n^2+n}$
17. Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 7, a suma dwóch wyrazów środkowych wynosi 8. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.
18. Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego jest równa 30, a iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi 11. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?

19. Różnica ciągu arytmetycznego jest równa 3. Wyznacz n , jeśli:
- suma S_n wynosi 54, a suma S_{n+2} jest równa 99,
 - suma S_n jest o 300 mniejsza od sumy wyrazów od a_{n+1} do a_{2n} .
20. Piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy a . Wyznacz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.
21. Ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) spełniają warunki: $a_1 = b_1 = 1$ oraz $a_7 = b_{10}$. Wyznacz wzory ogólne tych ciągów, jeśli łączna suma siedmiu początkowych wyrazów ciągu (a_n) i dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n) wynosi 170.

4.9. Ciąg geometryczny (1)

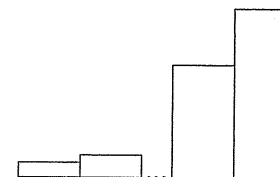
Zestaw I

- Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , którego początkowe wyrazy wypisano poniżej. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.
 - $\frac{1}{2}, 2, 8, \dots$
 - $5, 0,5, 0,05, \dots$
 - $9, 6, 4, \dots$
 - $16, -12, 9, \dots$
 - $5, -5, 5, \dots$
 - $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \dots$
- Oblicz wyrazy: a_2, a_3, a_4, a_6 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
 - $a_1 = 27, q = \frac{2}{3}$
 - $a_1 = 9, q = -1$
 - $a_1 = \sqrt{2} - 1, q = \sqrt{2}$
- Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
 - $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5, n = 6$
 - $a_1 = 0,4, q = 1,5, n = 5$
 - $a_1 = \frac{3}{2}, q = -\frac{1}{3}, n = 4$
 - $a_1 = 13, q = -1, n = 14$
 - $a_1 = 2, q = \frac{\sqrt{2}}{2}, n = 9$
 - $a_1 = -\frac{1}{9}, q = -\sqrt{3}, n = 10$
- Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
 - $a_6 = \frac{4}{9}, q = -\frac{1}{3}$
 - $a_7 = -24, q = \sqrt{2}$
 - $a_5 = 2,5, q = 0,2$
- Wyznacz iloraz q ciągu geometrycznego (a_n) .
 - $a_1 = 40, a_4 = 5$
 - $a_1 = 1, a_5 = 4$
 - $a_2 = -\sqrt{2}, a_5 = -3\sqrt{6}$

- Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) .
 - $a_1 = 4, a_4 = \frac{1}{2}$
 - $a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$
 - $a_5 = -6, a_{10} = 6$
 - $a_3 = 3, a_6 = 3000$
 - $a_4 = 2, a_6 = 0,08$
 - $a_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}, a_7 = 5\sqrt{5}$
- Wyznacz x , jeśli liczby: a, x, b tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.
 - $a = 10, b = 90$
 - $a = 1, b = 4,5$
 - $a = -4, b = -2$
- Wstaw między liczby x i y takie trzy liczby, aby otrzymać pięciowyrazowy ciąg geometryczny.
 - $x = 1, y = 64$
 - $x = 27, y = \frac{16}{3}$
 - $x = \sqrt{2}, y = 9\sqrt{2}$
- Suma drugiego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 6, a różnica wyrazów czwartego i drugiego jest równa 24. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz q tego ciągu.
- Różnica wyrazów piątego i pierwszego ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 10, a różnica wyrazów czwartego i drugiego jest równa 3. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
- Suma drugiego i szóstego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest równa -34 , a suma pierwszego i piątego wyrazu jest równa 17. Który wyraz tego ciągu jest równy 64?

Test jednokrotnego wyboru

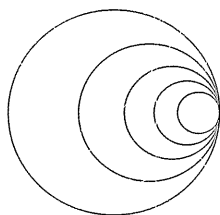
- Piąty wyraz ciągu geometrycznego: $\sqrt{3} + 1, 2, 2\sqrt{3} - 2, \dots$ jest równy:
A. $20 - 12\sqrt{3}$, B. $12\sqrt{3} - 20$, C. 20, D. $12\sqrt{3} + 20$.
- Liczby 27 i 8 są odpowiednio drugim i piątym wyrazem ciągu geometrycznego. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:
A. 18, B. 12, C. $\frac{8}{3}$, D. -12 .
- Dany jest skończony ciąg prostokątów, których pola tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{3}{2}$ (rysunek obok). Jeśli pole najmniejszego prostokąta jest równe $\frac{4}{9}$, a pole największego wynosi $5\frac{1}{16}$, to pole środkowego prostokąta jest równe:
A. 1, B. $\frac{3}{2}$, C. $\frac{9}{4}$, D. $\frac{27}{8}$.



15. Cenę książki, która pierwotnie była równa a , podnoszono pięciokrotnie – za każdym razem o 2%. Następnie pięciokrotnie ją obniżano – również o 2% za każdym razem. Cena c książki po tych zmianach spełnia warunek:
- A. $c = a$, B. $c > 1,10a$, C. $c < a$, D. $c < 0,9a$.

Zestaw II

16. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 70 zł. Najdroższa z nich kosztowała o 10 zł więcej niż dwie pozostałe razem. Ile kosztowała każda z książek?
17. Długości boków trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Oblicz:
- a) obwód tego trójkąta, jeśli jego najkrótszy bok ma długość 3, a stosunek obwodu do długości najdłuższego boku wynosi $\frac{19}{9}$,
b) iloraz tego ciągu, jeśli trójkąt jest prostokątny.
18. Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny. Oblicz:
- a) długość najkrótszej krawędzi, jeśli objętość prostopadłościanu jest równa 27 m^3 , a suma długości wszystkich krawędzi jest równa 52 m,
b) długość przekątnej prostopadłościanu, jeśli jego objętość jest równa 216 m^3 , a pole powierzchni bocznej wynosi 192 m^2 .
19. Średnice nieskończonego ciągu kół stycznych wewnętrznie (rysunek obok) tworzą malejący ciąg geometryczny. Różnica pól koła czwartego i koła piątego wynosi $3\frac{77}{81}\pi$, a stosunek pola dziesiątego koła do pola ósmego koła jest równy $\frac{16}{81}$. Oblicz promień największego z kół.



4.10. Ciąg geometryczny (2)

Zestaw I

1. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.
- a) $a_n = \frac{4}{2^n}$ d) $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
b) $a_n = 2 \cdot 7^n$ e) $a_n = 4 \cdot (\sqrt{3})^{n+1}$
c) $a_n = 2 \cdot (-5)^n$ f) $a_n = 2 \cdot 5^{2n-1}$

2. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest geometryczny.

a) $a_n = 3^n + 2$ d) $a_n = 2^{n+1} - 5$
b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ e) $a_n = \frac{10^n + 2^n}{2 \cdot 5^n + 2}$
c) $a_n = \frac{(-2)^{n+6}}{2} - 3$ f) $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$

3. Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $\begin{cases} a_4 = 3a_2 \\ a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_2 + a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = 120 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases}$

4. Oblicz x , jeśli podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
- a) $x, x+1, x-3$ b) $x^2-1, x+1, 2x-1$ c) $\frac{1}{x+1}, x, 3x^2$
5. Stosunek sumy trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy wyrazów pierwszego i trzeciego wynosi 0,7. Oblicz iloraz q tego ciągu.
6. Dwa wyrazy środkowe ciągu geometrycznego mającego czternaście wyrazów wynoszą $\frac{5}{3}$ i $\frac{5}{9}$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz q tego ciągu.
7. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 15, a suma ich odwrotności jest równa $\frac{3}{20}$. Wyznacz te liczby i określ monotoniczność ciągu.
8. Wyznacz cztery liczby tworzące malejący ciąg geometryczny, jeśli:
- a) suma pierwszej i ostatniej z nich wynosi 36, a suma wszystkich liczb jest równa 60,
b) suma skrajnych liczb wynosi 9, a suma środkowych jest równa 6.
9. Suma pierwszego i trzeciego wyrazu monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 5, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 17. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
10. Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 13. Drugi wyraz jest o 5 mniejszy od różnicy między trzecim i pierwszym wyrazem. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

11. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest geometryczny.

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$

Test jednokrotnego wyboru

12. Wskaż ciąg geometryczny o ilorazie 3.
- A. $a_n = \frac{3^n}{n}$ C. $a_n = 3n + 2$
 B. $a_n = 3^n - 1$ D. $a_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{2^n} - 1$
13. Iloraz niemonotonicznego ciągu geometrycznego może być równy:
- A. $\frac{112}{111}$, B. $3 - \sqrt{5}$, C. $1234 \cdot 10^{-4}$, D. $3 - \pi$.
14. Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q jest malejący, jeśli:
- A. $a_1 = -3$, $q = 4$, C. $a_1 = -4$, $q = -\frac{1}{2}$,
 B. $a_1 = 5$, $q = -2$, D. $a_1 = -10$, $q = 0,1$.
15. Dany jest skończony ciąg trójkątów równoramiennych o podstawie 16. Długości ramion trójkątów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{2}{3}$. Obwód największego z trójkątów wynosi 178. Ile maksymalnie trójkątów może być w tym ciągu?
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Zestaw II

16. Wykaż, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to (b_n) też jest ciągiem geometrycznym.
- a) $b_n = a_{2n}$ c) $b_n = a_{n+1} - a_n$
 b) $b_n = \frac{5}{a_n}$ d) $b_n = 4a_{n+2} - 3a_n$
17. Dane są ciągi geometryczne (a_n) i (b_n) . Wykaż, że:
- a) ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ też jest ciągiem geometrycznym,
 b) ciąg $d_n = 5a_n + 2b_n$ jest ciągiem geometrycznym, jeśli ilorazy ciągów (a_n) i (b_n) są równe.
18. Dany jest ciąg (a_n) :
- $$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 5a_n + 4 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$$
- a) Wykaż, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n + 1$ jest ciągiem geometrycznym i zapisz wzór ogólny tego ciągu.
 b) Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

19. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru k ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

$$\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = \left| \sin \frac{\pi(2n+1)}{4} \right| \cdot a_n \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$$

Wyznacz wzór ogólny tego ciągu, jeśli jego siódmy wyraz jest równy 1,5.

4.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Zestaw I

1. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.
- a) 3, 6, 12, 24, ... b) 8, 4, 2, 1, ... c) 1, -3, 9, -27, ...
2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
- a) $a_1 = -1$, $q = 2$, $n = 8$ c) $a_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 10$
 b) $a_1 = \frac{2}{9}$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 5$ d) $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $n = 20$
3. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
- a) $q = 3$, $S_6 = 728$ c) $q = -\sqrt{2}$, $S_6 = -7$
 b) $q = -\frac{1}{2}$, $S_5 = 33$ d) $q = -1$, $S_{13} = 9$
4. Uzupełnij tabelę, jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q .

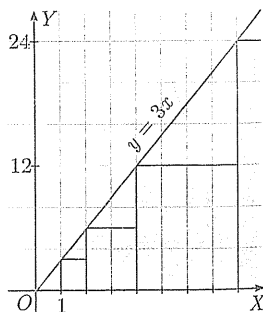
a_1	q	n	a_n	S_n
	2	8		1020
27		4	8	
100	0,1		0,01	
$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	7		

5. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy x , a iloraz tego ciągu wynosi -1 . Oblicz S_n , jeśli:
- a) $n = 10$, c) n jest liczbą parzystą,
 b) $n = 15$, d) n jest liczbą nieparzystą.

6. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:
- $S_3 = 35$, a różnica wyrazów pierwszego i czwartego wynosi 17,5,
 - $S_4 = 20$, a różnica wyrazów pierwszego i trzeciego wynosi 8.
7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:
- suma wszystkich wyrazów wynosi 258, $a_1 = 6$, $q = -2$,
 - suma wszystkich wyrazów wynosi 1000, $a_1 = 25$, $q = 3$.
8. Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego wynosi 26, a suma wyrazów drugiego i piątego jest równa -78 . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -61 ?
9. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $S_5 - S_3 = 72$ i $a_4 - a_3 = 12$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 33, a różnica wyrazów pierwszego i szóstego jest równa 99. Oblicz iloraz q i pierwszy wyraz tego ciągu.

Test jednokrotnego wyboru

11. Suma dwunastu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 63, jeśli pierwszy i drugi wyraz tego ciągu są równe odpowiednio:
- A. 3 i 6, B. $\sqrt{2}$ i 2, C. 8 i -8 , D. $\sqrt{2} - 1$ i $2 - \sqrt{2}$.
12. Ciąg (a_n) jest monotonicznym ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Jeśli $S_3 = 90$ i $S_4 = 75$, to:
- A. $q = \frac{1}{2}$, B. $a_1 = -32$, C. $q = -\frac{1}{2}$, D. $q = 2$.
13. Figura, której fragment przedstawiono na rysunku, składa się z dziesięciu prostokątów. Dwa wierzchołki każdego z nich leżą na osi OX , a jeden z pozostałych wierzchołków należy do prostej $y = 3x$. Długości krótszych boków prostokątów tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 1. Pole tej figury wynosi:
- A. $6(2^{10} - 1)$, C. $3(2^{10} - 1)$,
 B. $4^{10} - 1$, D. $4^9 - 1$.



Zestaw II

14. Suma czterech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego wynosi 8, a suma kolejnych czterech jest równa 72. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.
15. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6, a stosunek sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu do sumy kolejnych pięciu wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.
16. Dany jest dziesięciowyrazowy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych wynosi 341, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 682. Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz tego ciągu.
17. Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Iloraz i pierwszy wyraz tego ciągu są różne od zera. Wykaż, że stosunek sumy wyrazów o numerach parzystych do sumy wyrazów o numerach nieparzystych jest równy ilorazowi tego ciągu.
18. Iloczyn czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równy 324. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu, jeżeli $a_1 - a_2 = 6$.
19. a) Wykaż, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to:
- $$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$$
- b) Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa a , a suma odwrotności tych wyrazów wynosi b . Wyznacz iloczyn n początkowych wyrazów tego ciągu.

*4.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

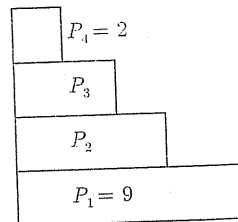
Zestaw I

1. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) . Stosunek sumy pierwszych dziesięciu wyrazów o numerach parzystych do sumy pierwszych dziesięciu wyrazów o numerach nieparzystych wynosi $\frac{9}{8}$. Suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

2. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest o 51,2% większa od sumy pierwszych trzech jego wyrazów.
- Wyznacz iloraz tego ciągu.
 - Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli siódmy wyraz jest równy 25.
3. a) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny wynosi 15. Jeśli pierwszą i drugą liczbę zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
- b) Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie geometryczny. Wyznacz te liczby, jeśli suma wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 26.
4. Iloczyn trzech liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 64. Jeśli pierwszą z nich zwiększymy o 2, drugą – o 1, a trzecią – o 18, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
5. Pomiedzy podane liczby wstaw takie dwie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.
- 4 i 18
 - 3 i 27
 - 1 i 8
6. Pomiedzy liczby 2 i 30 wstaw takie dwie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
7. a) Wyrazy pierwszy, drugi i piąty rosnącego ciągu arytmetycznego tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jeśli jego pierwszy wyraz jest równy 2.
- b) Wyrazy skrajne skończonego ciągu arytmetycznego wynoszą –1 i 13. Wyrazy drugi, trzeci i szósty tego ciągu tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.

Test jednokrotnego wyboru

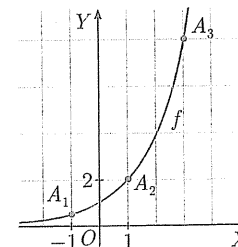
8. Figura na rysunku składa się z czterech prostokątów. Pola: P_1, P_2, P_3 tworzą ciąg geometryczny, a pola: P_2, P_3, P_4 – ciąg arytmetyczny. Pole tej figury jest równe:
- 15,
 - 18,
 - 21,
 - 46.



9. Liczby: $a, b, 7$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby: $1, b - 2, 3a$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:
- $a - b = 2$,
 - $a = 5$,
 - $b = 3$,
 - $a + b = 8$.
10. Pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ tworzą ciąg geometryczny. Iloraz tego ciągu jest równy:
- $\frac{1}{4}$,
 - $\frac{3}{2}$,
 - $\frac{5}{3}$,
 - 4.

Zestaw II

11. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli pierwszą z nich podniesiemy do kwadratu, a od drugiej i od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby, jeśli ich suma wynosi 9.
12. Suma trzech liczb tworzących rosnący ciąg geometryczny wynosi 7. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, a pierwsze dwie pozostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
13. Z czterech zapisanych kolejno liczb pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeśli suma pierwszej i ostatniej wynosi 1, a suma drugiej i trzeciej jest równa $\frac{3}{4}$.
14. Wyrazy: a_1, a_2, a_4 rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz q i określ znak wyrazu a_1 .
15. Liczby: a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a liczby: $a + b, b + c, c + a$ – kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.
16. Liczby: $2x + y, x + 2y, 5y - x$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby: $(y - 1)^2, xy + 1, (x + 1)^2$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz x i y .
17. Punkty: $A_1(-1, y_1), A_2(1, y_2), \dots, A_5(x_5, y_5)$ należą do wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ (rysunek obok). Odcięte tych punktów tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że ich rzędne tworzą ciąg geometryczny i oblicz:
- współrzędne punktu A_5 ,
 - długość odcinka A_3A_4 .



18. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) i ciąg arytmetyczny (b_n) takie, że:

$$a_1 - b_1 = 1, \quad a_2 - b_2 = 1, \quad a_3 - b_3 = 5, \quad a_4 - b_4 = 17.$$

Wyznacz pierwsze cztery wyrazy ciągu geometrycznego.

- *19. Dany jest ciąg arytmetyczny: 1, 4, 7, 10, ... Wykaż, że ciąg geometryczny, którego pierwsze dwa wyrazy to 1 i 4, jest podciągiem tego ciągu.

4.13. Procent składany

O ile nie zaznaczono inaczej, przyjmij roczną kapitalizację odsetek. W przypadku kapitalizacji codziennej załóż, że rok ma 365 dni. Stopa procentowa podawana jest zawsze w skali roku.

W obliczeniach nie uwzględniaj podatku od odsetek, a odpowiedzi podawaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, chyba że w treści zadania napisano inaczej.

Zestaw I

- Jaką kwotę będziemy dysponowali po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 5000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
 a) $n = 2, r = 3\%$ c) $n = 5, r = 4\%$ e) $n = 10, r = 5\%$
 b) $n = 2, r = 5\%$ d) $n = 5, r = 8\%$ f) $n = 20, r = 6\%$
- Kapitał 10 000 zł został złożony w banku na sześć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli oprocentowanie wynosiło:
 a) w pierwszym roku 5%, w drugim roku – 4,5%, a w czterech ostatnich latach – 4%,
 b) w pierwszym roku 4,5%, w czterech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 4,5%,
 c) w pierwszym roku 6%, w trzech kolejnych latach – 5%, a w dwóch ostatnich – 4%.
- Kapitał 10 000 zł złożono w banku na n lat przy oprocentowaniu 5%. Oblicz wielkość dopisanych odsetek. Jak zmieniłaby się wielkość kapitału zgromadzonego na koncie po n latach, gdyby od odsetek co roku naliczono podatek w wysokości 20% w skali roku?
 a) $n = 5$ b) $n = 10$

4. Pożyczono pewną kwotę na cztery lata. Jaka to była kwota, jeśli roczna stopa procentowa wynosiła 5% i zapłacono odsetki w wysokości:

a) 108 zł, b) 431 zł?

Zaokrąglaj odpowiedź do pełnych złotych.

- Do banku wpłacono pewną kwotę na 10 lat. Oprocentowanie w pierwszych czterech latach wynosiło 6%, a potem spadło do 4%. Jaką kwotę złożono w banku, jeśli końcowy kapitał wynosił 9585 zł? Zaokrąglaj odpowiedź do pełnych złotych.
- Do banku wpłacono 5000 zł na cztery lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane:
 a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
- Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po ośmiu latach uzyskać 4000 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4,8%, a odsetki są kapitalizowane:
 a) co rok, b) co miesiąc?
- Oprocentowanie lokaty A wynosiło w kolejnych pięciu latach: 6%, 5%, 5%, 4%, 3%. Stopa procentowa lokaty B była w tym czasie stała. Oblicz tę stopę, jeśli wpłacenie kapitału na pięć lat na lokatę A było tak samo opłacalne jak wpłacenie tego kapitału na pięć lat na lokatę B .
- Rodzice w dniu narodzin córki założyli dla niej lokatę oprocentowaną 6%. Wpłacili na lokatę tyle pieniędzy, aby na dwudzieste urodziny córka dysponowała kwotą 50 000 zł. Ile wynosił ulokowany kapitał? O ile rodzice musieliby zwiększyć kapitał po 10 latach, gdyby stopę procentową obniżono wówczas do 5%?

Test jednokrotnego wyboru

- Bank oferuje trzyletnie lokaty oprocentowane 4% rocznie oraz pożyczki – również trzyletnie – oprocentowane 5% rocznie. Zysk banku od przyjęcia i pożyczania kwoty k na trzy lata wynosi po zaokrągleniu 1310 zł dla:
 A. $k = 30\,000$ zł, B. $k = 35\,000$ zł, C. $k = 40\,000$ zł, D. $k = 45\,000$ zł.
- Odsetki od pożyczki 1000 zł, oprocentowanej 5% w skali roku i niespłaconej przez n lat, wyniosą po zaokrągleniu 1079 zł, dla:
 A. $n = 5$, B. $n = 10$, C. $n = 15$, D. $n = 20$.

12. Tomek chce złożyć na lokacie 1000 zł, aby po roku dysponować kapitałem przekraczającym 1100 zł. Której z lokat przedstawionych w tabeli nie powinien wybierać?

Lokata	Oprocentowanie	Kapitalizacja
I	9,50%	codziennie
II	9,60%	co miesiąc
III	9,70%	co dwa miesiące
IV	9,80%	co pół roku

A. lokaty I B. lokaty II C. lokaty III D. lokaty IV

Zestaw II

13. Pan Artur zaciągnął kredyt wysokości 40 000 zł oprocentowany 6% w skali roku. Kredyt będzie spłacany przez cztery lata w ratach płaconych na koniec roku. Każda rata składa się z części kapitałowej wysokości 10 000 zł i odsetek naliczonych za ostatni rok od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono harmonogram spłat kredytu.

Rok	Rata [zł]	Stan zadłużenia [zł]
1	$10\,000 + 0,06 \cdot 40\,000 = 12\,400$	$40\,000 - 10\,000 = 30\,000$
2	$10\,000 + 0,06 \cdot 30\,000 = 11\,800$	$30\,000 - 10\,000 = 20\,000$
3	$10\,000 + 0,06 \cdot 20\,000 = 11\,200$	$20\,000 - 10\,000 = 10\,000$
4	$10\,000 + 0,06 \cdot 10\,000 = 10\,600$	$10\,000 - 10\,000 = 0$

Łącznie pan Artur spłaci zatem:

$$12400 + 11800 + 11200 + 10600 = 46000 \text{ [zł]}.$$

- a) Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu wysokości 120 000 zł, oprocentowanego 7% w skali roku i spłacanego przez sześć lat w równych ratach kapitałowych wynoszących 20 000 zł. Oblicz wielkość zapłaconych odsetek.
- *b) Kredyt wysokości K jest spłacany przez n lat w równych ratach kapitałowych wielkości $\frac{K}{n}$ płaconych na koniec roku. Oprocentowanie kredytu wynosi r w skali roku. Wykaż, że odsetki od całego kredytu są równe:

$$I = rK \cdot \frac{n+1}{2}$$

14. Michał zamierza kupić rower, który kosztuje 849 zł. Na ten cel przeznaczy środki ze sprzedaży siedmiu obligacji zakupionych trzy lata temu. Oprocentowanie roczne obligacji wynosi 6%, a odsetki kapitalizowane są co pół roku. Czy Michałowi wystarczy pieniędzy, jeśli cena obligacji wynosiła 100 zł?

15. Pan Jan zaciągnął kredyt wysokości 100 000 zł na zakup mieszkania. Oprocentowanie kredytu wynosi 5% w skali roku. Jaki procent pożyczonej kwoty będą stanowiły odsetki, jeśli kredyt zostanie spłacony jednorazowo po dziesięciu latach? Ile wyniosłyby odsetki, gdyby 50 000 zł zostało spłacone po pięciu latach, a pozostała część należności – po kolejnych pięciu latach?

16. Przeczytaj przykład w ramce.

Na początku każdego roku Paulina wpłacała po 100 zł na konto oprocentowane 4% w skali roku. Po czterech latach środki zgromadzone na koncie wyniosły:

$$\begin{aligned} K &= 100 \cdot 1,04^4 + 100 \cdot 1,04^3 + 100 \cdot 1,04^2 + 100 \cdot 1,04 = \\ &= 100 \cdot (1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04) = \\ &= 100 \cdot 1,04 \cdot \frac{1 - 1,04^4}{1 - 1,04} \approx 441,63 \text{ [zł]} \end{aligned}$$

Oblicz, ile wyniosłyby środki zgromadzone na koncie Pauliny po czterech latach, gdyby oprocentowanie konta było równe:

a) 5%, b) 6%.

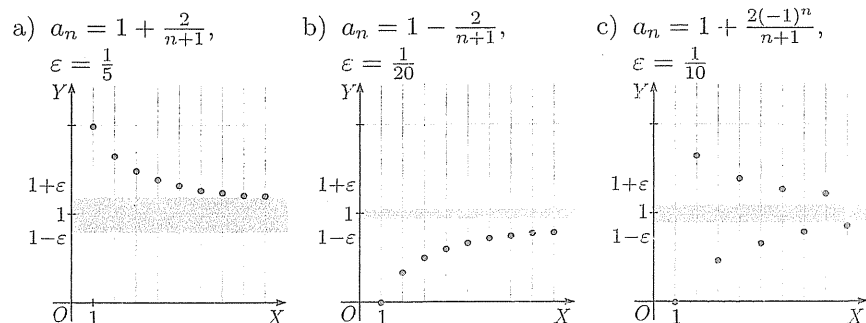
17. Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4%. Jakim kapitałem pani Ania będzie dysponowała po 8 latach, a jakim – po 20 latach oszczędzania?
18. Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny, na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6%, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jakim kapitałem będzie dysponować Paweł w wieku:
- a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?
19. Do funduszu inwestycyjnego wpłacono 10 000 zł na sześć lat. Na koniec każdego roku wpłacona kwota generuje odsetki wysokości 7%, które dalej oprocentowane są 5% w skali roku. Oblicz wielkość kapitału zgromadzonego po sześciu latach.

20. Oprocentowanie rachunku bankowego wynosi 4%. Aby za n lat wypłacić 10 000 zł, dzisiaj trzeba wpłacić kwotę $\frac{10000}{1,04^n}$ zł. Oblicz, jakim co najmniej kapitałem na rachunku dysponuje pan Jan, jeśli nie będzie więcej dokonywał wpłat, a przez najbliższe pięć lat zamierza wypłacać na koniec każdego roku 10 000 zł. Jaką kwotę powinien dysponować, aby mógł dokonywać wypłat przez najbliższe dziesięć lat?
21. Pani Ania zgromadziła na rachunku oszczędnościowym 100 000 zł. Nie będzie więcej dokonywać wpłat na ten rachunek, ale przez najbliższe 20 lat zamierza na koniec każdego roku dokonywać stałych wypłat. Jakiej maksymalnie wielkości mogą być wypłaty, jeśli roczna stopa procentowa wynosi 5%?

*4.14. Granica ciągu

Zestaw I

1. Oblicz kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) , naszkicuj jego wykres i podaj granicę tego ciągu.
- a) $a_n = \frac{4}{n}$ c) $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ e) $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$
b) $a_n = \frac{-2}{n}$ d) $a_n = -2 + \frac{1}{n}$ f) $a_n = -4 + \frac{(-1)^n}{n}$
2. Podaj granicę ciągu (a_n) .
- a) $a_n = \frac{2}{n^2}$ c) $a_n = -2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ e) $a_n = \frac{3+n^2}{n^2}$
b) $a_n = 5 - \frac{2}{n^2}$ d) $a_n = 4 + \frac{1}{n^3}$ f) $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{2n}$
3. Ustal, które wyrazy ciągu $a_n = \frac{3}{n+1}$ nie należą do przedziału:
- a) $(-1; 1)$, b) $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, c) $(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10})$, d) $(-\frac{1}{100}; \frac{1}{100})$.
4. Na rysunku przedstawiono wykres ciągu (a_n) . Ustal, ile wyrazów tego ciągu nie należy do przedziału $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$.



5. Podaj granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{1}{2^n} - 3$ b) $a_n = (\frac{2}{3})^n + 2$ c) $a_n = 0,9^n + 1$ d) $a_n = \frac{5 \cdot 2^n - 1}{2^n}$

Test jednokrotnego wyboru

6. Liczba 3 jest granicą ciągu:
- A. $a_n = \frac{3-n}{2n}$, B. $b_n = \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n}}$, C. $c_n = \frac{n^2-9}{n^2+3n}$, D. $d_n = \frac{2+3^{n+1}}{3^n}$.
7. Wskaż ciąg, którego granica jest liczbą dodatnią.
- A. $a_n = 2 \sin(n\pi)$ C. $c_n = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + n\pi)$
B. $b_n = \frac{2}{n^2+1}$ D. $d_n = \frac{3+(-1)^n}{n}$
8. Ile wyrazów ciągu $a_n = \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}$ nie należy do przedziału $(0,99; 1,01)$?
- A. 98 B. 99 C. 100 D. 101

Zestaw II

9. Naszkicuj wykres ciągu (a_n) . Czy ten ciąg ma granicę? Jeśli tak, to ile ona wynosi?
- a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{2}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$
b) $a_n = \begin{cases} \frac{3+n}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$
10. Podaj wzór podciągu ciągu (a_n) składającego się z wyrazów o numerach nieparzystych oraz wzór podciągu ciągu (a_n) składającego się z wyrazów o numerach parzystych. Czy ciąg (a_n) ma granicę?
- a) $a_n = (-1)^n + 2$ b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3+n}{n}$ c) $a_n = \cos(n\pi)$
11. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $|a_n| < \varepsilon$?
- a) $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\varepsilon = 0,1$ c) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $\varepsilon = 0,001$
b) $a_n = \frac{3}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 0,01$ d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+100}$, $\varepsilon = 0,0001$
12. Dla jakich n wyrazy ciągu $a_n = \frac{n}{2n+1}$ spełniają podaną nierówność?

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{1000}$$

13. Dla jakich n spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$?

a) $a_n = \frac{2n}{1-5n}$, $g = -\frac{2}{3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ b) $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2}$, $g = 3$, $\varepsilon = 10^{-5}$

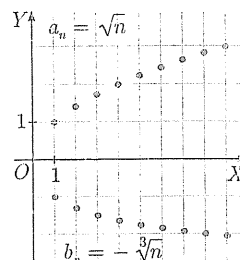
14. Podaj przykład ciągu (a_n) :

- a) rosnącego i zbieżnego do 6,
b) malejącego i zbieżnego do $\sqrt{2}$,
c) niemonotonicznego i zbieżnego do π .

*4.15. Granica niewłaściwa

Zestaw I

1. Na rysunku obok przedstawiono wykresy ciągów $a_n = \sqrt{n}$ i $b_n = -\sqrt[3]{n}$. Podaj granicę każdego z nich.



2. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$, czy do ∞ .

- a) $a_n = \frac{1}{4}n$ d) $a_n = -n^2 + \frac{1}{10}$
b) $a_n = 1 - n$ e) $a_n = -0,01n^3$
c) $a_n = n^2 + 5$ f) $a_n = \sqrt{n+1} - 2$

3. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ lub do ∞ .

- a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = -4^n$ c) $a_n = -(\sqrt{3})^n$ d) $a_n = (-2)^n$

Test jednokrotnego wyboru

4. Wskaż ciąg rozbieżny do ∞ .

- A. $a_n = \frac{n-2n^2}{n}$ B. $a_n = \frac{3^n-6^n}{2 \cdot 3^n}$ C. $a_n = \frac{n+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$ D. $a_n = \frac{2^{2n}+1}{4^n}$

5. Ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym -2 ma granicę niewłaściwą, jeśli iloraz:

- A. $q = -1$, B. $q = 1 - \sqrt{2}$, C. $q = \sin 185^\circ$, D. $q = 2\pi - 3$.

6. Wskaż ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r rozbieżny do $-\infty$.

- A. $a_1 = -3$, $r = 2$ C. $a_1 = 3$, $r = -2$
B. $a_1 = 5$, $r = 3$ D. $a_1 = \sqrt{2}$, $r = 1$

Zestaw II

7. Sprawdź, czy ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą.

- a) $a_n = \begin{cases} 3^{-n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$
b) $a_n = \begin{cases} \frac{n^2+1}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n! & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

8. Dla jakich n spełniony jest warunek $a_n > M$, a dla jakich $a_n > 2M$?

- a) $a_n = 4n - 5$, $M = 1000$ c) $a_n = \frac{n^4+10n}{n}$, $M = 100$
b) $a_n = 0,01n^2 - 10$, $M = 50$ d) $a_n = n^4 - 100$, $M = 10\,000$

9. Wykaż, że ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest rozbieżny:

- a) do ∞ , jeśli $r > 0$, b) do $-\infty$, jeśli $r < 0$.

*4.16. Obliczanie granic ciągów (1)

Zestaw I

1. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Aby obliczyć granicę, dzielimy licznik i mianownik przez n^k , gdzie k jest największym wykładnikiem w mianowniku.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 3}{3n^2 + 5n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \frac{2n+5}{1-2n}$ d) $a_n = \frac{6n^2-n+3}{3n^2+n-2}$ g) $a_n = \frac{5n^4-n^3+n^2+6}{n^3-2n^4}$
b) $a_n = \frac{4n+1}{2n+3}$ e) $a_n = \frac{4-n-7n^2}{1+n^2}$ h) $a_n = \frac{5+2n^3-n^4+2n^5}{3-n^4+2n^2-6n^5}$
c) $a_n = \frac{3-5n^2}{4-2n^2}$ f) $a_n = \frac{-4n^3+2n-1}{3n^3-n-5}$ i) $a_n = \frac{-n^4+3n^3-8n^6}{7+n^2-6n^4+6n^6}$

2. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \frac{20n^5-5n^2-4n+2}{n^4-2n^2+3}$ b) $a_n = \frac{20n^5-5}{4n^5+7n-3}$ c) $a_n = \frac{-n^6+4n^5-n^3+n}{5-n^3-4n^5+7n^9}$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Aby obliczyć granicę, wyłączamy z każdego czynnika n przed nawias.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)(n+2)}{(n+5)(4n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n}\right) \left(4 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{4}$$

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{(6n-1)(4n+2)}{(2n+1)(3n-1)}$

c) $a_n = \frac{(2+5n)^2}{(n+1)^2}$

b) $a_n = \frac{(2-5n)(3n+1)}{(2-10n)(n+1)}$

d) $a_n = \frac{(n^2+3)^2}{(1-2n^2)^2}$

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{(3n+4)(n+1)^2}{(2-6n^2)(n+1)}$

d) $a_n = \frac{(1-n^2)(5n^2-1)}{(1-4n^3)(2+n)}$

b) $a_n = \frac{(2n+1)^3}{(1-2n)(3-n^2)}$

e) $a_n = \frac{(2n-1)^4}{2n^4 - n^3 + 2n^2 + 3}$

c) $a_n = \frac{(n^3+2)(2n-3)}{(1-4n^2)(n^2+1)}$

f) $a_n = \frac{4-n+3n^3-9n^4}{(1-3n^2)(1+n^2)}$

5. Podziel licznik i mianownik ciągu $a_n = \frac{3 \cdot 5^n + 4^n - 3}{6 \cdot 5^n - 3^n + 5 \cdot 2^n}$ przez 5^n i oblicz granicę tego ciągu. Ile wynosi granica ciągu $b_n = \frac{a_n}{2^n}$?

6. Sprawdź, czy granica ciągu (a_n) jest liczbą nieujemną.

a) $a_n = \frac{2^n+1}{3+4 \cdot 2^n}$

d) $a_n = \frac{5^n+4 \cdot 6^n}{5^n-6^n}$

b) $a_n = \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n}$

e) $a_n = \frac{2 \cdot 7^n - 4^{n+1}}{4^n + 5 \cdot 7^n}$

c) $a_n = \frac{3^n+4^n}{4^n-3^n}$

f) $a_n = \frac{3^{n+1}+6^n}{4^n-3 \cdot 8^n}$

Test jednokrotnego wyboru

7. Wskaż ciąg, którego granica jest liczbą pierwszą.

A. $a_n = \frac{n^2-10}{1-5n^2}$

C. $a_n = \frac{5n^2-1}{2n^3+n+2}$

B. $a_n = \frac{(2n-3)(1-7n)}{(3+n)(n+2)}$

D. $a_n = \frac{(3n^2-1)^2}{(n^3+5)(1+3n)}$

8. Liczba 2 jest granicą ciągu $a_n = \frac{kn^3-2n+3}{2n^2+n-4n^3}$ dla:

A. $k = -8$,

B. $k = -4$,

C. $k = 4$,

D. $k = 8$.

9. Granica ciągu $a_n = \frac{3 \cdot q^n + 2^n + 1}{4^n + 5^n}$ jest równa 3 dla:

A. $q = 1$,

B. $q = 2$,

C. $q = 4$,

D. $q = 5$.

10. Do przedziału $(0; 1)$ należy nieskończenie wiele wyrazów ciągu:

A. $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$,

B. $a_n = \frac{1-n}{2n}$,

C. $a_n = \frac{1-n}{n^2+2n}$,

D. $a_n = \frac{n-1}{n}$.

Zestaw II

11. Wyznacz sumę występującą we wzorze ciągu (a_n) i oblicz jego granicę.

a) $a_n = \frac{4n^2-3n+1}{1+2+3+\dots+n}$

d) $a_n = \frac{1+5+5^2+\dots+5^{n-1}}{5^n+2}$

b) $a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^3+2n+5}$

e) $a_n = \frac{2^{n+1}-6}{1+2+2^2+\dots+2^n}$

c) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+(n+2)}{2+4+6+\dots+(2n+2)}$

f) $a_n = \frac{3+3^2+\dots+3^n}{4+16+64+\dots+4^n}$

12. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{x_n}{1+x_n}$, jeśli:

a) $x_n = -1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$,

b) $x_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \dots + \frac{2n-1}{n}\right)^2$.

13. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+2}$

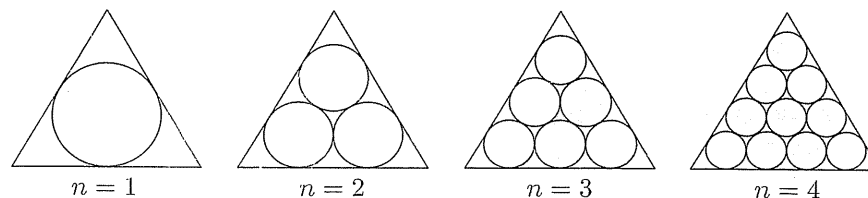
b) $a_n = \frac{4\sqrt{n}+3}{1-2\sqrt{n}}$

c) $a_n = \frac{n-\sqrt{n}}{5+\sqrt{n}}$

d) $a_n = \frac{2n+\sqrt[3]{n}}{1+n^2}$

14. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x}{1+2x}$. Oblicz granicę ciągu $a_n = f(n^2+1)$.

15. W trójkąt równoboczny o polu S wpisano koła jak na rysunku.



Niech n oznacza liczbę kół stycznych do jednego z boków trójkąta, a S_n – sumę pól wszystkich kół wpisanych w trójkąt w n -tym kroku. Wykaż, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

*4.17. Obliczanie granic ciągów (2)

Zestaw I

1. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = 5^n - 3 \cdot 2^n$ b) $a_n = 4^n + 3 \cdot 6^n - 8^n$ c) $a_n = -2^n + 4 \cdot 7^n - 5^n$

2. Oblicz granice ciągów (a_n) i (b_n) oraz granicę ciągu $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

a) $a_n = (n-1)(n+1)^2 - n^3$, $b_n = n - \sqrt{n} + 1$

b) $a_n = (1-2^n)^2 - 4^n$, $b_n = 3^n - 2 \cdot 6^n$

3. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = 10n - 4n^3$

b) $a_n = 3n^5 - 20n$

c) $a_n = 100n^3 - 5n^6$

d) $a_n = 5n^3 - n^2 - 9$

e) $a_n = -3n^4 + 9n^2 + 8$

f) $a_n = 2n^5 - 7n^4 + n$

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{n^2-5}{10n+1}$

d) $a_n = \frac{2n^3-n^2-1}{(n+1)^2}$

g) $a_n = \frac{3^n+2}{2^n-1}$

b) $a_n = \frac{1-n^3}{2n-1}$

e) $a_n = \frac{(1-3n^3)(n+4)}{5-n+3n^2}$

h) $a_n = \frac{4^n+5^n}{5-2 \cdot 4^n}$

c) $a_n = \frac{-n^4+100}{5-n^2}$

f) $a_n = \frac{(2n^3-1)(1-5n^2)}{(n^3+2)(1-2n)}$

i) $a_n = \frac{3 \cdot 7^n - 5^n + 1}{9 - 5^n}$

5. Oblicz granice ciągów (a_n) i (b_n) oraz granicę ciągu $c_n = a_n - b_n$.

a) $a_n = \frac{n^2}{n+2}, b_n = \frac{1-2n^2}{n}$

b) $a_n = 3 \cdot 2^n, b_n = \frac{6^n+1}{3^n}$

6. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

c) $a_n = n - \sqrt{n^2-1}$

b) $a_n = \sqrt{4n-1} - \sqrt{3n+5}$

d) $a_n = \sqrt{2n^2+4} - \sqrt{n^2+5}$

Test jednokrotnego wyboru

7. Wskaż ciąg (a_n) , którego granica jest równa $-\infty$.

A. $a_n = \frac{5^n-9}{5^n+2^n}$

C. $a_n = \frac{3-2^{2n}}{2^n+6}$

B. $a_n = \frac{-n^2+n}{(n+1)(n^2+2)}$

D. $a_n = \frac{(n^2-3)(1+2n)}{(1+n)^3}$

8. Granica ciągu $a_n = \frac{-2n^3+n+9}{kn^2}$ jest równa ∞ dla:

A. $k < 0$,

B. $k = 0$

C. $k > 0$,

D. $k \in \mathbb{R}$.

9. Dane są ciągi $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ i $b_n = \frac{n+3}{n^2+1}$. Wskaż ciąg (c_n) , który ma granicę niewłaściwą.

A. $c_n = a_n + b_n$

C. $c_n = a_n \cdot b_n$

B. $c_n = a_n - b_n$

D. $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Zestaw II

10. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{2n-1}{2} - \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n+1}$

b) $a_n = 2^n - \frac{1+4+4^2+\dots+4^{n-1}}{2^n+1}$

11. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \begin{cases} 5 & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{5n^2+1}{n+1} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} \frac{3-n}{n^2+1} & \text{dla } n \leq 1000 \\ \frac{n^3+1}{1-n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases}$

12. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rozbieżny do ∞ ?

a) $a_n = \frac{kn}{(|k-1|)n+3}$

b) $a_n = \frac{(k-1)n^2-n-100}{kn}$

c) $a_n = \frac{n^k}{2+4+\dots+2n}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$

13. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n+2}}$

b) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3-2}}{\sqrt{4n^2-n+1}}$

c) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{25n^4+n+2}}$

14. Oblicz granicę ciągu (a_n) , korzystając z twierdzenia o trzech ciągach.

a) $a_n = \frac{1}{n} \sin n$

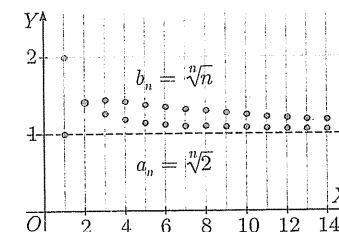
b) $a_n = \frac{1}{2n+1} \cos n^2$

c) $a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{\pi(2n-1)}{4}$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykresy ciągów $a_n = \sqrt[n]{2}$ i $b_n = \sqrt[n]{n}$. Oblicz granicę ciągu (c_n) .

a) $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n}$

b) $c_n = \sqrt[n]{n \cdot 7^n}$



16. Oblicz granicę ciągu (a_n) , korzystając z twierdzenia o trzech ciągach.

a) $a_n = \sqrt[n]{8n^3+5^n+2^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{3^n+6^n+8^n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{n+2^n}$

d) $a_n = \sqrt[n]{n+\cos n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

17. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach różnych od zera i różnicy $r \neq 0$.

a) Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{(a_n)^2} = \frac{1}{2r}$.

b) Oblicz powyższą granicę, jeśli suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) o numerach podzielnych przez 3 jest równa 95, a suma trzeciego i szóstego wyrazu wynosi 11.

18. Liczba 1 jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, którego iloraz wynosi $4 \sin x - 1$. Dla jakich wartości x z przedziału $(0; \pi)$ ciąg ten ma granicę niewłaściwą?

*4.18. Szereg geometryczny

Zestaw I

- Wyznacz n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego, a następnie oblicz sumę S tego szeregu.
 - $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$
 - $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$
- Oblicz sumę szeregu geometrycznego (a_n) , mając dany jego pierwszy wyraz i iloraz q .
 - $a_1 = 8, q = \frac{3}{5}$
 - $a_1 = -9, q = \frac{2}{3}$
 - $a_1 = 5,4, q = 0,1$
 - $a_1 = -100, q = -0,25$
 - $a_1 = 2, q = \sqrt{2} - 1$
 - $a_1 = 2\sqrt{6}, q = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Uzasadnij, że szereg geometryczny jest zbieżny, i oblicz jego sumę.
 - $12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \dots$
 - $-25 - 10 - 4 - \frac{8}{5} - \dots$
 - $27 - 18 + 12 - 8 + \dots$
 - $4 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots$
 - $-\sqrt{5} + 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} - \dots$
 - $0,16 + 0,12 + 0,09 + 0,0675 + \dots$
- Sprawdź, czy szereg geometryczny (a_n) o podanych dwóch wyrazach początkowych jest zbieżny. Jeśli jest, to oblicz jego sumę.
 - $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}-1}, a_2 = \sqrt{5}$
 - $a_1 = \pi + 3, a_2 = \pi^2 - 9$
 - $a_1 = 3 - \sqrt{2}, a_2 = 9\sqrt{2} - 13$
- Dany jest zbieżny szereg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 , ilorazie q i sumie S . Znajdź dwie z tych wielkości, wyznacz wartość trzeciej.
 - $a_1 = 0,1, S = 0,3$
 - $q = -0,9, S = -1$
 - $a_1 = -\sqrt{5}, S = 1 - \sqrt{5}$
 - $q = \frac{\sqrt{3}}{2}, S = -\sqrt{3}$
 - $q = k, S = k + 1$, gdzie $k \in (-1; 1)$
 - $a_1 = k, S = 2k$, gdzie $k \neq 0$

- Oblicz pierwszy wyraz i iloraz q nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:
 - suma pierwszych czterech wyrazów jest równa 30, a suma wszystkich wyrazów wynosi 32,
 - drugi wyraz jest równy 6, a suma wszystkich wyrazów wynosi 27.
- Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.
 - 0,(4)
 - 0,(7)
 - 0,0(9)
 - 2,4(5)
 - 0,(50)
 - 1,2(34)
 - 1,(027)
 - 2,(5445)
- Dla jakich x podany szereg geometryczny jest zbieżny?
 - $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots$
 - $-1 + \frac{4-x}{x-3} - \left(\frac{4-x}{x-3}\right)^2 + \dots$

Test jednokrotnego wyboru

- Stosunek sumy wszystkich wyrazów zbieżnego ciągu geometrycznego do sumy wyrazów o numerach nieparzystych wynosi $\frac{3}{4}$. Iloraz tego ciągu jest równy:
 - $-\frac{1}{3}$,
 - $-\frac{1}{4}$,
 - $\frac{1}{4}$,
 - $\frac{1}{3}$.
- Dany jest ciąg geometryczny $a_n = a_1 q^{(n-1)}$ taki, że szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny. Suma wyrazów ciągu o numerach parzystych wynosi 6, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 8. Wynika stąd, że:
 - $a_1 = -6\frac{2}{9}$,
 - $a_1 = -4\frac{2}{3}$,
 - $a_1 = 2\frac{5}{8}$,
 - $a_1 = 3\frac{1}{2}$.
- Monotoniczny ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $a_1 - a_5 = 80$ oraz $a_3 - a_5 = 10$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi:
 - $-121\frac{1}{2}$,
 - $60\frac{3}{4}$,
 - 90,
 - $121\frac{1}{2}$.

Zestaw II

- Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.
 - $2x + 4 + \frac{8}{x} + \dots = 5x + 3$
 - $x - 2 + \frac{4}{x} - \dots = \frac{6x}{x+5}$
 - $x - 2 + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \dots = \frac{1}{4}x^2 - 1$
 - $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots = 1 - \frac{4}{3} \cos x$

13. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Dla jakich x suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest większa od 10?

- a) $a_1 = 5, q = 2x$
 b) $a_1 = -3, q = x + 1$
 c) $a_1 = 2, q = x^2$

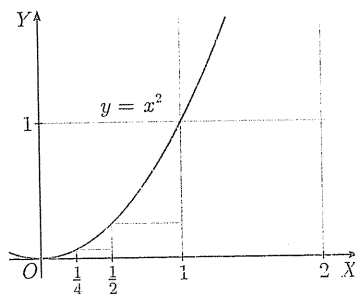
14. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

- a) $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots$ c) $f(x) = 1 + \frac{5}{x} + \frac{25}{x^2} + \dots$
 b) $f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \dots$ d) $f(x) = -1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \dots$

15. a) Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego wynosi -4 , a suma sześciu tych wyrazów jest równa -192 . Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

- b) Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy odwrotności tych wyrazów wynosi 18. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, jeśli dziesiąty wyraz jest równy $\frac{3}{16}$.

16. Na rysunku przedstawiono fragment nieskończonego ciągu prostokątów. W każdym z nich dwa wierzchołki leżą na osi OX , a jeden z pozostałych wierzchołków należy do paraboli $y = x^2$. Oblicz sumę pól wszystkich prostokątów, jeśli długości ich krótszych boków tworzą malejący ciąg geometryczny.



17. Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = -a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

- a) Oblicz sześć początkowych wyrazów tego ciągu.
 b) Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n) danego wzorem $b_n = \frac{a_n}{3^n}$.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

a) $a_n = \frac{3n-7}{2}$ b) $a_n = (n-2)(6-n)$ c) $a_n = \frac{6n^2+n-1}{2n+1}$

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i określ jego monotoniczność.

a) $a_2 = 1, a_4 = 9$ b) $a_3 = 1, a_6 = -8$ c) $a_4 = 3\sqrt{2}, a_{10} = 0$

3. Oblicz dziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

a) $a_1 = 5, a_6 - a_4 = 5$ b) $r = -2, a_2 \cdot a_3 = -1$ c) $a_8 + a_{12} = 2\sqrt{5}$

4. Oblicz sumę szesnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $\begin{cases} a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_7 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 - a_3 = -4 \\ a_4 \cdot a_5 = a_2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_6 = 3 \\ a_3 + a_9 = 6 \end{cases}$

5. Wyznacz sumę $S_6 + S_{18}$ ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r , jeśli:

a) $a_1 = 6, S_{10} = 15,$ c) $a_6 + a_{10} = -1,$
 b) $r = \frac{2}{3}, S_7 = 7,$ d) $a_8 = p$, gdzie $p \in \mathbb{R}$.

6. Ciąg arytmetyczny (a_n) spełnia warunki: $a_1 \cdot a_3 = 0, a_2 \cdot a_7 = -1$. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz sumę jego pierwszych dwudziestu wyrazów.

7. Oblicz sumę wyrazów $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{19} + a_{20}$ ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli:

- a) suma trzydziestu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 60,
 b) suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych jest równa 55, a suma dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych wynosi 50.

8. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego jest równy 5, a różnica ciągu wynosi 2. Ostatni wyraz tego ciągu jest trzy razy mniejszy od sumy wszystkich poprzednich wyrazów. Wyznacz liczbę N wyrazów tego ciągu i oblicz ich sumę.

9. Lewa strona równania jest sumą początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .
- a) $7 + 4 + 1 + \dots + x = -45$ c) $-3 - 1 + 1 + \dots + x = 4x$
 b) $-5 + 2 + 9 + \dots + x = 75$ d) $4 + 2,5 + 1 + \dots + x = 2x + 3$
10. Długości boków wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3 cm. Wyznacz liczbę boków wielokąta, jeśli jego najdłuższy bok ma długość 23 cm, a obwód jest równy 100 cm.
11. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.
- a) $a_n = 2 \cdot (\sqrt{3})^{-n+1}$ b) $a_n = \frac{4^n + 2^n}{2^n + 1}$ c) $a_n = 5^{1-2n}$
12. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q i zbadaj jego monotoniczność.
- a) $q = 5, a_4 = -5$ b) $a_1 = 4, a_7 = \frac{1}{2}$ c) $a_2 = 5, a_3 = 1$
13. Oblicz drugi i piąty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) .
- a) $\begin{cases} a_6 = 9a_4 \\ a_2 + a_5 = 84 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_6 - a_3 = 14 \\ \frac{a_5}{a_2} = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_3 + a_6 - a_5 = 44 \\ a_2 + a_5 - a_4 = -22 \end{cases}$
14. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) o ilorazie q .
- a) $b_1 = \frac{1}{4}, q = -2$ b) $q = \sqrt{2}, b_6 = 8\sqrt{2}$ c) $b_1 = -1, b_4 = 3\sqrt{3}$
15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) .
- a) $b_1 \cdot b_3 = 1, b_2 + b_3 = 3$
 b) $b_1 = 6, S_3 = 4,5$
 c) $b_3 = 4, S_5 = 4$
16. Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a suma wszystkich wyrazów jest cztery razy większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.
17. Stosunek sumy dziewięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy trzech początkowych wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu, jeśli pierwszy wyraz jest równy 12.

18. Suma pierwszego, trzeciego i piątego wyrazu monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 21, a różnica wyrazów trzeciego i pierwszego jest równa 3. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
19. Pożyczka wysokości 5000 zł wraz z odsetkami została spłacona jednorazowo po roku. Czy odsetki przekroczyły 5,5% pożyczonej kwoty, jeśli kapitalizowane były miesięcznie, a roczna stopa procentowa wynosiła:
- a) w pierwszym półroczu 6%, w drugim półroczu – 4,8%,
 b) w pierwszym kwartale 3,6%, w pozostałych miesiącach – 6%?
20. Rok temu założono dwuletnią lokatę wysokości 4000 zł. Odsetki naliczone po roku stanowią 49% wszystkich odsetek końcowych. Jakie jest oprocentowanie lokaty?
21. Na początku każdego roku pani Jola wpłacała na konto 1200 zł. Ostatniej – dziesiątej – wpłat dokonała rok temu. Przez cały ten okres oprocentowanie konta wynosiło 6% w skali roku.
- a) Oblicz, jaką kwotę dysponuje pani Jola obecnie.
 b) Oprocentowanie konta zmniejszono do 5%. Pani Jola nie zamierza więcej dokonywać wpłat na konto, ale – począwszy od następnego roku – będzie przez kolejnych dziesięć lat wypłacać na koniec każdego roku stałą kwotę. Oblicz maksymalną wysokość wypłaty.
 Podaj odpowiedź z dokładnością do pełnych złotych.

Zestaw II

22. Wykaż, że jest to ciąg arytmetyczny. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów.
- a) $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n - 10}{2} \end{cases}$ dla $n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = 1 - \sqrt{3} \\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{3} \end{cases}$ dla $n \geq 1$
23. Wykaż, że jest to ciąg geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu i oblicz sumę S wszystkich jego wyrazów.
- a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$

24. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) .
 a) $b_n = \frac{5-3n}{2n+1}$ b) $b_n = 3^n - 2n - 1$ c) $b_n = n^3 - 4n^2 - 9n + 36$
25. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) . Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1}^2 + a_n^2$ też jest geometryczny.
26. Dane są ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) . Uzasadnij, że ciąg o wzorze ogólnym $c_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n$ też jest arytmetyczny.
27. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest dana wzorem $S_n = 2n^2 - 5n$. Oblicz sumę: $a_{10} + a_{12} + \dots + a_{32}$.
28. Dany jest ciąg (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = an^2 + bn + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sformułuj i uzasadnij warunek, przy którym ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
29. Dana jest funkcja $f(x) = 5x - 2$. Oblicz $f(2) + f(5) + f(8) + \dots + f(29)$.
30. Liczby: $4, x, y$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby: $2, x + 7, -3y$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz x i y .
31. Oblicz granicę ciągu (a_n) .
 a) $a_n = \frac{1-2n+4n^2}{6n^2+n+7}$ d) $a_n = \frac{3 \cdot 4^n - 5}{8 - 6 \cdot 4^n}$
 b) $a_n = \frac{5-n^3}{(n+2)^2(3n^2-1)}$ e) $a_n = \frac{5^n+3^n}{2^n+9 \cdot 3^n}$
 c) $a_n = \frac{(3n^2-4n+1)(1-n)}{4n^2+7}$ f) $a_n = \frac{10 \cdot 3^n - 3}{4^n + 8}$
32. Oblicz granicę ciągu (a_n) .
 a) $a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-3}$ b) $a_n = \sqrt{3n^2+1} - \sqrt{n^2+n+6}$
33. Wyznacz wartości parametru p , dla których:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-p)n}{3pn+1} = 5$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^2-1}{(p^2-1)n^2+3} = -\infty$.
34. Oblicz sumę szeregu geometrycznego.
 a) $1 + \sin \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \dots$ b) $(\sqrt{5} + 2) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-2}{4} + \dots$
35. Przedstaw ułamek okresowy w postaci ułamka zwykłego.
 a) $0,(5)$ b) $1,(36)$ c) $2,0(45)$ d) $4,(063)$

36. Dla jakich x ciąg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny?
 a) $q = \frac{x-2}{3x+1}$ b) $q(x) = x^2 - 4x - 5$ c) $q = \sin x$
37. Dla jakich x istnieje granica skończona ciągu (a_n) ? Oblicz tę granicę.
 a) $a_n = \frac{2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \dots + \frac{2^n}{(x+1)^n}$
 b) $a_n = \sqrt{2} \cos x + 2 \cos^2 x + \dots + (\sqrt{2})^n \cos^n x$
38. Wyznacz zbiór wszystkich x , dla których szereg geometryczny jest zbieżny, i znajdź jego sumę S . Dla jakich wartości x suma ta jest równa 2?
 a) $\frac{2}{3} + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \dots$ b) $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \dots$
39. Wykaż, że dla wszystkich $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, dla których szereg geometryczny jest zbieżny, jego suma jest większa od zera.
 a) $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \dots$ b) $\sin^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \sin^2 x} - \dots$
40. Rozwiąż równanie.

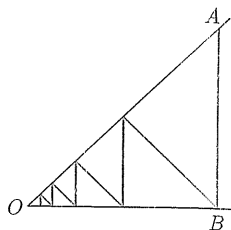
$$15\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \dots\right) = 8\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots\right)$$
41. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.
 a) $f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \dots$ b) $f(x) = 1 + \frac{x-2}{x-3} + \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 + \dots$
42. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) i oblicz jego granicę.

$$a_n = \frac{3n^2+n-2}{(n+1)+(n+2)+(n+3)+\dots+2n}$$
43. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru k granica ciągu (a_n) określonego wzorem:

$$a_n = \frac{(k^2-4k)n+4(9)}{1-2n}$$
 jest nie większa niż 2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) , jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.
44. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ o numerach:
 a) parzystych, b) niepodzielnych przez 3.
45. Liczby: $27, a_2, a_3$ są początkowymi wyrazami zbieżnego ciągu geometrycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz sumę wszystkich jego wyrazów, jeśli liczby: $a_2, a_3, 6$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

46. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r = -\frac{1}{2}$ i ciąg $b_n = 9^{a_n}$.
- Uzasadnij, że (b_n) jest ciągiem geometrycznym zbieżnym.
 - Oblicz a_6 , jeśli suma wszystkich wyrazów ciągu (b_n) jest równa 4,5.

47. Na rysunku przedstawiono fragment nieskończonego ciągu odcinków tworzących łamaną. Kolejne odcinki są prostopadłe na przemian albo do półprostej OB , albo do półprostej OA . Wyznacz długość łamanej, jeśli kąt między tymi półprostymi ma miarę 45° , a długość odcinka OA jest równa a .



48. Dany jest nieskończony ciąg sześcianów. Krawędź pierwszego z nich jest równa 9 cm, a długość krawędzi każdego kolejnego sześcianu jest dwa razy mniejsza od długości krawędzi poprzedniego sześcianu.
- Sprawdź, czy suma objętości wszystkich sześcianów przekracza litr.
 - Oblicz stosunek pola powierzchni pierwszego sześcianu do sumy pól powierzchni pozostałych sześcianów.

Zestaw III

49. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 16, a suma $2n$ początkowych wyrazów wynosi 64. Wyznacz różnicę tego ciągu, jeśli jego pierwszy wyraz jest równy 1.

50. Dany jest k -elementowy ciąg arytmetyczny:

$$\frac{k^2 - 1}{k}, k, \frac{k^2 + 1}{k}, \frac{k^2 + 2}{k}, \dots, \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

- Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu i sumę S_k wszystkich jego wyrazów.
 - Ile wyrazów ma ten ciąg, jeśli suma $S_k = 26$?
51. Dla jakich wartości parametru m liczby: x, y, z , które są rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2m + 3 \\ 4x - y + z = 5 \\ -x + 2y - z = m - 2 \end{cases}$$

tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny?

52. Wykaż, że jeśli stosunek sumy k początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) do sumy l początkowych wyrazów tego ciągu wynosi $k^2 : l^2$, to:

$$\frac{a_k}{a_l} = \frac{2k - 1}{2l - 1}$$

53. Liczby a i b są pierwiastkami równania $x^2 + Ax + 2 = 0$, a liczby c i d są pierwiastkami równania $x^2 + Bx + 32 = 0$. Wyznacz A i B , jeśli liczby: a, b, c, d tworzą w podanej kolejności rosnący ciąg geometryczny.

54. Suma $3n$ początkowych wyrazów rosnącego ciągu geometrycznego jest równa 7, a suma $2n$ początkowych wyrazów wynosi 3. Oblicz sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

55. Suma kwadratów trzech liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 21. Wyznacz te liczby, wiedząc, że jeśli do pierwszej z nich dodamy 1, od drugiej odejmiemy 4, a trzecią zostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny.

56. Oblicz granicę i zbadaj monotoniczność ciągu: $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$.

57. Zbadaj zbieżność ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{\pi n}{2} \quad \text{b) } a_n = \frac{n+1}{n^2+3} \cos n\pi \quad \text{c) } a_n = \left(\sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} \right)^n$$

58. Wartości funkcji f spełniają dla każdego x należącego do jej dziedziny równanie:

$$1 + f(x) + (f(x))^2 + \dots = \frac{1}{4x - 3x^2}$$

gdzie lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

- Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f .
- Narysuj wykres funkcji f .

59. Dany jest szereg geometryczny:

$$\sqrt{1+x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \dots$$

Dla jakich wartości x suma tego szeregu jest:

- równa 2,
- mniejsza od 4?

60. Dla jakich wartości parametru m równanie $1 + x + x^2 + \dots = x + m$, gdzie lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego, ma dwa rozwiązania?

61. Podaj zależność, jaka musi zachodzić między liczbami a i b , aby równanie $x^4 + ax^2 + b = 0$ miało cztery pierwiastki tworzące ciąg arytmetyczny.

62. Wykaż, że jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to jego wyrazy spełniają zależność:

$$(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1})a_{n+1} = (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})a_n$$

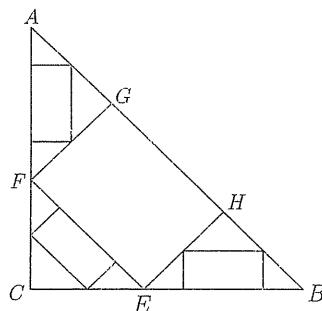
63. Ciąg dodatnich liczb naturalnych dzielimy na kolejne ciągi skończone jak pokazano obok – w n -tym wierszu wpisujemy n kolejnych liczb.

1 :	1
2 :	2, 3
3 :	4, 5, 6
4 :	7, 8, 9, 10
5 :	11, 12, 13, 14, 15

a) Podaj pierwszy wyraz w n -tym wierszu.

b) Wykaż, że suma wyrazów w n -tym wierszu dana jest wzorem $S_n = \frac{n^3+n}{2}$.

64. W równoramienny trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej a wpisujemy prostokąt jak na rysunku. Trzy mniejsze trójkąty, które powstały w ten sposób, są przystające. Następnie w każdy z trzech nowo powstałych trójkątów znów wpisujemy prostokąt i otrzymujemy dziewięć trójkątów przystających. Procedurę tę powtarzamy w nieskończoność. Niech S_n oznacza sumę pól prostokątów wpisanych w krokach od pierwszego do n -tego włącznie.



a) Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a^2}{4}$.

b) Oblicz pole największego trójkąta i porównaj je z wynikiem uzyskanym w podpunkcie a).

65. Ciąg (a_n) zawiera kolejne liczby złożone z samych jedynek: 1, 11, 111, ... Wykaż, że suma dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu jest dziewięć razy mniejsza od wyrazu a_{21} pomniejszonego o 21.

66. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach: 15, 1155, 111555, 11115555, ... Podaj jego wzór ogólny i wykaż, że ciąg $b_n = \sqrt{a_n + 1}$ jest ciągiem o wyrazach naturalnych.

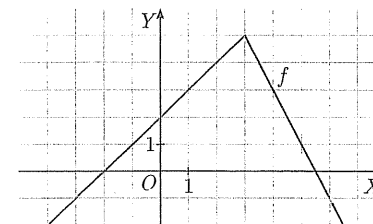
*5. Rachunek różniczkowy

*5.1. Granica funkcji w punkcie

Zestaw I

1. Odczytaj z wykresu, ile jest równa granica funkcji f w danym punkcie.

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



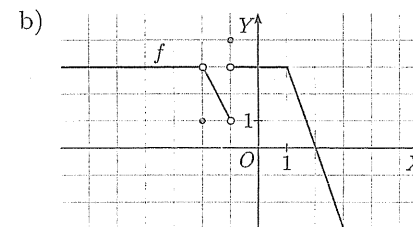
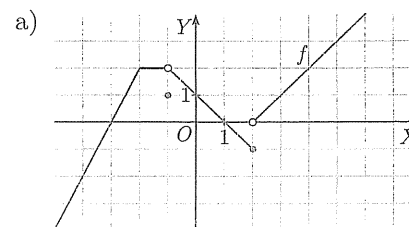
2. Naskicuj wykres funkcji f . Ile jest równa granica $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

- $f(x) = x^2 - 4x$
- $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

3. Naskicuj wykres funkcji f . Czy funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 = 1$?

- $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ 4 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x < 1 \\ -3x + 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Określ, w których punktach $x_0 \in \{-2, -1, 0, 2\}$ istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

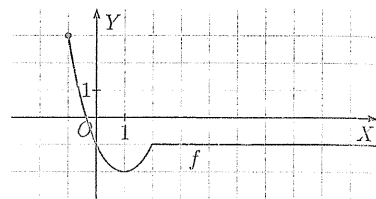


5. Dla jakich wartości parametru a funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 = 2$?

- $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \leq 2 \\ a & \text{dla } x > 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

Test jednokrotnego wyboru

6. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla $x \in \langle -1; \infty \rangle$. Dla $x \in (-\infty; -1)$ funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -x + a$. Granica $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ istnieje, jeśli:



- A. $a = -3$, C. $a = -1$,
B. $a = 3$, D. $a = 2$.
7. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2-4}{|x^2-4|}$. Ile jest punktów $x_0 \in \mathbb{R}$, w których nie istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$?
A. 0 B. 2 C. 3 D. 4
8. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje dla $x > 2$ wartość stałą równą 4. Funkcja ta nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$, jeśli dla $x \leq 2$ jest określona wzorem:
A. $f(x) = -2x + 8$, C. $f(x) = 3x - 2$,
B. $f(x) = -x + 6$, D. $f(x) = 2x + 2$.

Zestaw II

9. Uzasadnij, korzystając z definicji, że funkcja f ma w punkcie $x_0 = 1$ granicę równą g .
a) $f(x) = 4x + 3$, $g = 7$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $g = -2$
10. Funkcja $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x = 1 \\ 2x - 3 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji g i określ, czy istnieją granice: $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

- a) $g(x) = f(x) + 3$ b) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(|x|)$

11. Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x) = \begin{cases} g(x) + m & \text{dla } x \leq 0 \\ h(x) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ ma granicę w punkcie $x_0 = 0$? Naszkicuj wykres tej funkcji dla wskazanej wartości m .

a) $g(x) = x^2 + 4x - 5$, $h(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = -x$, $h(x) = \frac{1}{x+1}$

*5.2. Obliczanie granic

Zestaw I

- Oblicz granicę.
a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 7)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} (4 - |x|)^2$ c) $\lim_{x \rightarrow 8} (4 - 9x + x^2)$
- Oblicz granicę.
a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{2x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5}{2x^2+4x+3}$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2+3x-5}{x+2} + 3x \right)$
- Oblicz granicę.
a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}}{x-\sqrt{x+3}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-|x-3|}}{x^2-\sqrt{2x}}$
- Oblicz granicę.
a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^3-27}$ g) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-25x}{x^2-4x-5}$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+7x-8}{2x^2-5x+3}$ e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4-5x-9x^2}{x^3+1}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-5x+1}{x^3+2x-3}$
c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^3}{x^2-5x+4}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$ i) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^3+x^2-2x-1}{2x^2+3x+1}$
- Oblicz granicę.
a) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x-1}-1}{2x-1}$
b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{5+3x}-2}{6x+2}$
- Dla jakiej wartości parametru a dana granica jest równa 2?
a) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + a)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} (a + |x|)^2$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 5x - a)$

7. Wyznacz wszystkie wartości x_0 , dla których zachodzi dana równość.

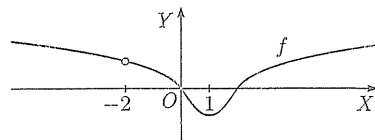
- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (4x - 5) = 7$
 b) $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - 5x + 9) = 3$
 c) $\lim_{x \rightarrow x_0} (|x| - 5) = -1$

Test jednokrotnego wyboru

8. Dana jest funkcja $f(x) = 3 - |2 - |1 - x||$. Dla której z podanych wartości x_0 zachodzi równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$?

- A. dla $x_0 = 0$ B. dla $x_0 = 2$ C. dla $x_0 = 3$ D. dla $x_0 = 6$

9. W układzie współrzędnych, w którym naszkicowano wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^3 + 8}$, zapomniano umieścić jednostkę na osi OY (rysunek obok). Granica funkcji f w punkcie $x_0 = -2$ równa jest:



- A. $\frac{2}{3}$, B. $\frac{3}{4}$, C. 1, D. $\frac{3}{2}$.

10. Równość $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x - a} = a + 6$ zachodzi dla pewnej liczby a należącej do przedziału:

- A. $\langle -3; -1 \rangle$, B. $\langle -1; 1 \rangle$, C. $\langle 1; 3 \rangle$, D. $\langle 3; 5 \rangle$.

Zestaw II

11. Przeczytaj przykład w ramce.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \text{Korzystamy ze wzoru} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1 - \sqrt[3]{2-x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x^2 - 8x - 9}$

12. Sprawdź, czy zachodzi równość:

a) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} = 2$, c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{2}{3}$.

13. Ustal, dla jakich wartości a zachodzi podana nierówność.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{3}a \cos(x-2)}{a^2 x + 1} + \frac{4}{x^3} \right) > 1$$

14. Oblicz granicę.

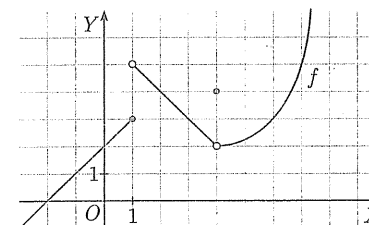
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\cos 2x}$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

*5.3. Granice jednostronne

Zestaw I

1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Odczytaj z niego, ile jest równa granica jednostronna funkcji f w danym punkcie.



- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Odpowiedź uzasadnij.

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{dla } x \leq 2 \\ 6 - x^2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 2 \\ 3 & \text{dla } x = 2 \\ 2x - 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{dla } x < 2 \\ -2 & \text{dla } x = 2 \\ x^2 - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

3. Wykaż, że funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0 .

a) $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$, $x_0 = -2$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{x-1}$, $x_0 = 1$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{3}{x-5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+2x-1}{1-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-4}{x^2-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2-x^2}{x-4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3+x-5}{2-x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2+2x-8}$

5. Sprawdź, czy funkcja f ma granicę niewłaściwą w punkcie $x_0 = 3$.

a) $f(x) = \frac{1-x}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{-3}{(x-3)^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

6. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{-2}{x+7}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$

7. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+2x}$

e) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$

d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-4}$

f) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

Test jednokrotnego wyboru

8. Wskaż funkcję, dla której $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

A. $f(x) = \frac{-1}{x+2}$

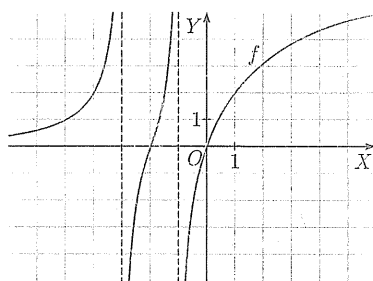
C. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

B. $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

D. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

9. Wykres funkcji f przedstawionej na rysunku obok ma dwie asymptoty pionowe: $x = -3$ i $x = -1$. Ile asymptot pionowych ma wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$?

- A. 0 B. 3 C. 2 D. 4



10. Funkcje $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$ i g mają taką samą granicę przy $x \rightarrow 3^+$, gdy:

A. $g(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$,

C. $g(x) = \frac{1}{(3-x)(x-4)}$,

B. $g(x) = \frac{1}{x(x-3)}$,

D. $g(x) = \frac{1}{(3-x)(6-x)}$.

Zestaw II

11. Dane są funkcje:

$f_1(x) = \frac{x+1}{x}$,

$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$,

$f_2(x) = \frac{2}{x}$,

$f_4(x) = \frac{1}{x}$.

a) Uzasadnij, że:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = \infty.$$

b) Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1(x) - f_4(x)), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_2(x) - f_4(x)), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_3(x) - f_4(x)).$$

12. Jaki warunek muszą spełniać parametry a i b , aby wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{x-1}$$

miał asymptotę pionową?

13. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x^2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x-3}$

c) $f(x) = \frac{x}{|x-3|-|x-1|}$

14. Wykres funkcji f ma dwie asymptoty pionowe: $x = -2$ oraz $x = 1$. Podaj asymptoty pionowe wykresu funkcji g .

a) $g(x) = f(x-1)$

b) $g(x) = f(-x) + 2$

c) $g(x) = f(|x|)$

*5.5. Granica funkcji w nieskończoności

Zestaw I

1. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - 4x^2 + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x - x^2)^7$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 3x^2 + 2x)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 2x - x^2)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)^4$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 - 12)$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+7x+3}{1-5x^3}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4x^2-3}{2x^2+5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x+5}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^4+2}{2x^4+x^2+1}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+2x+1}{3x-7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-1}{2-x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+2}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^4}{x^2+2x}$

3. Parametrom a , b i c przyporządkuj wartości 2, 3 i 4 tak, aby poniższe równości były prawdziwe.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^a}{2-3x^3} = -\frac{4}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^b}{x^3+2x+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^c}{2x^3+5} = \infty$$

4. Określ stopnie wielomianów występujących w liczniku i mianowniku funkcji wymiernej f . Oblicz granice funkcji f w ∞ oraz w $-\infty$. Co zauważasz?

a) $f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x(4x+2)}$ b) $f(x) = \frac{(3x+1)(2-x)}{(x^2-2)(x+3)}$ c) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{x(x^2+3)}$

5. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - x)$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+4})$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3} + x)$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x})$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+5x} + x)$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$

6. Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{4}{2+x^2}$ c) $f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{3x^2+2}$ e) $f(x) = \frac{x^3}{x^4+2x^2+8}$

b) $f(x) = \frac{3-x}{x^2+5}$ d) $f(x) = \frac{2-5x^2}{x^2+4x+1}$ f) $f(x) = \frac{1+x^2-2x^4}{4x^4}$

7. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ e) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2x+1}$

b) $f(x) = \frac{4x}{2-x}$ d) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ f) $f(x) = \frac{2x+7}{x^2+2x-3}$

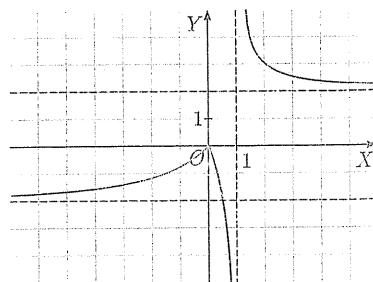
Test jednokrotnego wyboru

8. Niech $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-1}$, zaś $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-1}$. Wówczas:

A. $ab = -3$, B. $ab = 3$, C. $ab = 4$, D. $ab = 9$.

9. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{|2x|}{x-1}$. Asymptotami poziomymi wykresu funkcji $g(x) = f(x) - 2$ są proste:

A. $y = 2$, $y = -2$,
B. $y = 0$, $y = -2$,
C. $y = 0$, $y = -4$,
D. $y = -2$, $y = -4$.



10. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{9x^2+4x}+3x$. Jej wykres ma w $-\infty$ asymptotę poziomą daną równaniem:

A. $y = -\frac{3}{2}$, B. $y = -1$, C. $y = -\frac{2}{3}$, D. $y = 0$.

Zestaw II

11. Wyznacz granice w ∞ funkcji f oraz g .

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-1}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

12. Dla jakich wartości parametru a zachodzi poniższa równość?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6-3a)x^2+4x+7}{(a^2-4)x^2-x+12} = 2-3a$$

13. Wyznacz dziedzinę funkcji f . Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x-5}}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}$

14. Dla jakich wartości parametrów a i b wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{ax^3 + (a+b)x + 1}{2x^2 - 5x - 3}$$

ma jedną asymptotę pionową i jedną asymptotę poziomą?

15. Podaj asymptoty poziome wykresu funkcji g , jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

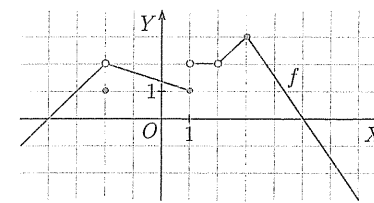
a) $g(x) = f(x) - 4$ b) $g(x) = |f(x)|$ c) $g(x) = f(|x|)$

*5.6. Ciągłość funkcji

Zestaw I

1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Odczytaj z niego, czy funkcja f ma granicę w punkcie x_0 oraz czy jest w tym punkcie ciągła.

a) $x_0 = -2$ c) $x_0 = 2$
b) $x_0 = 1$ d) $x_0 = 3$



2. Wykaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 .

a) $f(x) = 2x^2 + 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x_0 = 1$

3. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = -3$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3} & \text{dla } x \neq -3 \\ -2 & \text{dla } x = -3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-2}{2x+6} & \text{dla } x < -3 \\ \frac{x+2}{x+11} & \text{dla } x \geq -3 \end{cases}$

4. Naskicuj wykres funkcji f i sprawdź, czy jest to funkcja ciągła.

a) $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{dla } x \leq -1 \\ 1-3x & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 1 \\ -2x+3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{dla } x < 2 \\ 4 & \text{dla } x = 2 \\ x+2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

5. Zbadaj ciągłość funkcji f . Jeśli jest nieciągła, to podaj wszystkie jej punkty nieciągłości.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x^2-4} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x = -2 \\ -\frac{1}{4} & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x^2-9 & \text{dla } x \in (-2; 7) \\ \frac{x^2+1}{x} & \text{dla } x \in \langle 7; \infty \rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+4x+1}{x+1} & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ \frac{5}{6}x - \frac{7}{6} & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}} & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{dla } |x| \geq 1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{dla } x \in (-1; 0) \\ \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}} & \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$

6. Dla jakich wartości parametru a funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \neq 5 \\ a^2 & \text{dla } x = 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{x-1} & \text{dla } x \leq 0 \\ (x+a)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x < -1 \\ a+3 & \text{dla } x = -1 \\ x^2+2a & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2(x-2)^2 & \text{dla } x < 4 \\ 10-a & \text{dla } x = 4 \\ \sqrt{x}+3a & \text{dla } x > 4 \end{cases}$

Test jednokrotnego wyboru

7. Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^3-8}{2-x}$, zaś dla $x = 2$ jej wartość równa się $a^2 - 20$. Funkcja f jest ciągła, gdy:

A. $|a| = 2\sqrt{2},$ B. $|a| = 3\sqrt{2},$ C. $|a| = 2\sqrt{3},$ D. $|a| = 3\sqrt{3}.$

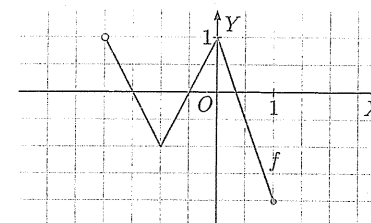
8. Funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax - \frac{1}{2}a & \text{dla } x \leq -1 \\ x^3 - 2x^2 + 5 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

jest ciągła dla pewnej wartości a należącej do przedziału:

A. $(-1; -\frac{1}{2}),$ B. $(-\frac{1}{2}; 0),$ C. $(0; \frac{1}{2}),$ D. $(\frac{1}{2}; 1).$

9. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ funkcja ta może być dana wzorem:



A. $f(x) = x^2 - 4x + 1,$
 B. $f(x) = -x^2 - 4x - 3,$
 C. $f(x) = x^2 - 2x - 1,$
 D. $f(x) = -x^2 - 2x + 1.$

Zestaw II

10. Dla jakich wartości parametrów a, b i c funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+x-6} & \text{dla } x < -3 \\ b-1 & \text{dla } x = -3 \\ c|x+1| & \text{dla } x > -3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-4} & \text{dla } x < 2 \\ bx+1 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-c}{x-3} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

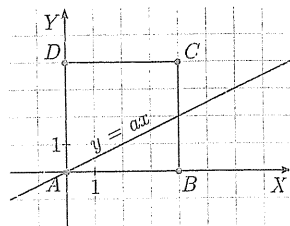
11. Dobierz punkty x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) tak, aby funkcja f była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x < x_1 \\ |x - 1| - |x - 2| & \text{dla } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 10 - x^2 & \text{dla } x > x_2 \end{cases}$$

12. Niech funkcja $y = f(m)$ opisuje liczbę pierwiastków równania kwadratowego $x^2 + 4x - 7 = m$ w zależności od parametru m . Naszkicuj wykres funkcji f i zbadaj jej ciągłość.

13. Dana jest funkcja $f(a) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, gdzie x_1 i x_2 są dwoma różnymi pierwiastkami równania $x^2 - (2 + a)x + 2a = 0$. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Czy funkcja f jest ciągła?

14. Niech F oznacza figurę będącą częścią kwadratu o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$ i $D(0, 4)$, która leży w półpłaszczyźnie $y \leq ax$, gdzie $a > 0$. Zbadaj ciągłość funkcji $y = P(a)$ opisującej pole figury F .



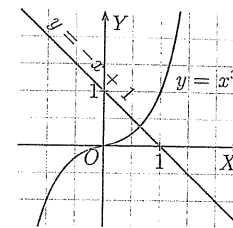
*5.7. Własności funkcji ciągłych

Zestaw I

- Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w podanym przedziale.
 - $2x^3 + 4x - 5 = 0$, $(0; 1)$
 - $\frac{2}{x^2} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$, $(1; 4)$
 - $x^3 + x = -4$, $(-2; -1)$
 - $\sin x = 3 - 2x$, $(0; \frac{\pi}{2})$
- Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i oceń, czy równanie ma rozwiązanie. Jeżeli ma, to podaj przykładowy przedział, w którym się ono znajduje. Sprawdź swoją odpowiedź, korzystając z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich.
 - $x^3 = 2x + 2$
 - $x^4 = 5 - x$
 - $2x - 7 = \cos x$
- Wyznacz przedział długości 0,1, w którym równanie $x^3 + 2x + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

4. Z rysunku obok wynika, że równanie $x^3 + x - 1 = 0$ (równoważne równaniu $x^3 = -x + 1$) ma jedno rozwiązanie x_0 należące do przedziału $(0; 1)$. Przedział ten dzielimy na n równych części. Sprawdź, do którego z otrzymanych przedziałów należy x_0 .

- $n = 2$
- $n = 4$



5. Naszkicuj wykres funkcji f i na tej podstawie określ, czy funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą. Następnie sprawdź, czy można zastosować twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów.

- $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \langle 1; 3 \rangle$
- $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in \langle -1; 0 \rangle \\ 4 - x^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in \langle -1; 0 \rangle \\ \sqrt{x} & \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in \langle 0; 4 \rangle \\ 2 - (x - 4)^2 & \text{dla } x \in \langle 4; 5 \rangle \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in (0; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} |x - 2| & \text{dla } x \neq 2 \\ -2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

6. Naszkicuj wykres funkcji f i na tej podstawie określ, czy funkcja f przyjmuje wartość największą. Następnie sprawdź, czy można zastosować twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów.

- $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in \langle 0; 2 \rangle$
- $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in \langle -1; 0 \rangle \\ -x & \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; 1)$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in \langle 0; 4 \rangle \\ 2 - (x - 4)^2 & \text{dla } x \in \langle 4; 5 \rangle \end{cases}$

Test jednokrotnego wyboru

7. Dana jest funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(-\frac{3}{2}) = 2\sqrt{5}$ i $f(\frac{4}{3}) = 5\sqrt{2}$. Wówczas do zbioru wartości tej funkcji należy na pewno liczba
- $5\sqrt{3}$
 - $3\sqrt{3}$
 - $\frac{3}{4}$
 - 0

8. Dana jest funkcja ciągła $f : \langle -4; 6 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. W tabeli podano wartości tej funkcji dla kilku wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	6
$f(x)$	3	-2	2	1	$-\frac{1}{2}$	-3	6	$\frac{5}{2}$	-1

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba miejsc zerowych tej funkcji?

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Zestaw II

9. Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu.

Czy równanie $\frac{1}{x} = 0$ ma rozwiązanie? Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła. Ponieważ $f(-1) = -1 < 0$ oraz $f(1) = 1 > 0$, to z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że równanie $\frac{1}{x} = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(-1; 1)$.

10. W narożniku prostokątnego trawnika o wymiarach 3 m na 7 m wbito kolek, do którego przywiązano na sznurku żarłoczną kozę. Wykaż, że długość x sznurka pozwalająca kozie na zjedzenie trawy dokładnie z połowy trawnika spełnia nierówność $2\sqrt{3} < x < 3\sqrt{2}$.

11. Naskicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 7 & \text{dla } -5 \leq x < -1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 10 & \text{dla } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

i podaj wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji g .

- a) $g(x) = f(x - 2)$ c) $g(x) = |f(x)|$
b) $g(x) = f(x) + 1$ d) $g(x) = f(|x|)$

12. Dla jakiej wartości parametru k największa wartość funkcji f jest o 2 większa od najmniejszej wartości tej funkcji w podanym przedziale?

- a) $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in \langle 1; k \rangle$, gdzie $k > 1$
b) $f(x) = kx^2 + 2x - 3$, $x \in \langle 1; 2 \rangle$

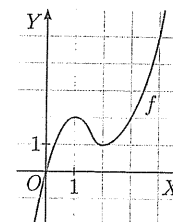
13. Niech $f(a)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $\sin x = ax$ dla $a > 0$. Czy funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą? A wartość największą?

*5.8. Pochodna funkcji

Zestaw I

1. Z wykresu funkcji f (rysunek obok) odczytaj przyrost wartości tej funkcji odpowiadający przyrostowi argumentu $x_0 = 2$ o h .

- a) $h = 1$ c) $h = 2$
b) $h = -1$ d) $h = -2$



2. Znajdź przyrost wartości funkcji f odpowiadający przyrostowi argumentu od x_0 do x_1 , a następnie oblicz iloraz różnicowy $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

- a) $f(x) = -2x^2 + 3$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$
b) $f(x) = \frac{3}{1+x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

3. Naskicuj wykres funkcji f oraz styczną tego wykresu przechodzącą przez punkty o odciętych $x_0 = 1$ i $x_1 = 4$. Oblicz współczynnik kierunkowy tej stycznej. Podaj wartość ilorazu różnicowego funkcji f odpowiadającego przyrostowi argumentu od x_0 do x_1 .

- a) $f(x) = (x - 2)^2$ b) $f(x) = -(x - 2)^2 + 5$ c) $f(x) = \frac{4}{x}$

4. Wyznacz iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0 .

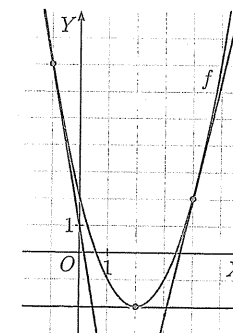
- a) $f(x) = 4x^2 - 1$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = x^3 - 2x$, $x_0 = 1$

5. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 , korzystając z definicji.

- a) $f(x) = -2x + 3$, $x_0 = 4$ c) $f(x) = 1 - x^3$, $x_0 = 0$
b) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 3$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f i styczne do tego wykresu w punktach o pierwszych współrzędnych: $-1, 2, 4$. Wstaw te liczby w miejsca oznaczone $\square$.

$$f'(\square) = 0, \quad f'(\square) = 4, \quad f'(\square) = -6$$



7. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Podaj z dokładnością do 1° miarę kąta, jaki ta styczna tworzy z osią OX .

a) $f(x) = x^2 + 3x, x_0 = -1$ c) $f(x) = 2x^3 - 2x, x_0 = 0$
 b) $f(x) = -x^2 + x, x_0 = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2$

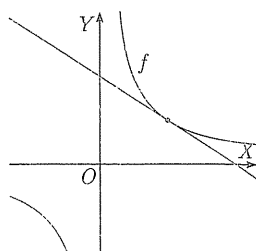
Test jednokrotnego wyboru

8. Pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{10}x$ w punkcie $x_0 = -1$ jest równa:

A. $-\frac{3}{10}$, B. $-\frac{1}{10}$, C. $\frac{1}{10}$, D. $\frac{3}{10}$.

9. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$ i styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(3, 2)$. Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy:

A. $-\frac{3}{2}$, B. -1 , C. $-\frac{3}{4}$, D. $-\frac{2}{3}$.



10. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$ tworzy z osią OX kąt równy:

A. 60° , B. 120° , C. 135° , D. 150° .

Zestaw II

11. Dla jakiego przyrostu h iloraz różnicowy funkcji $f(x) = 4x^2 - x + 7$ w punkcie $x_0 = 1$ jest równy $7,4$?

12. Dla jakiej wartości parametru m iloraz różnicowy funkcji $f(x) = x^3 - 2x + 4$ odpowiadający przyrostowi argumentu od $x_0 = m$ do $x_1 = m + 1$ przyjmuje najmniejszą wartość?

13. Zbadaj, czy funkcja f ma pochodną w punkcie $x_0 = 2$. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

14. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x|x+1| - x|x-1|$. Wskaż punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.

*5.9. Funkcja pochodna

Zestaw I

1. Na podstawie definicji pochodnej wyprowadź wzór na pochodną funkcji f .

a) $f(x) = 3x - 5$ b) $f(x) = ax + b$, gdzie a, b – stałe

2. Na podstawie definicji pochodnej wyprowadź wzór na pochodną funkcji f .

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ c) $f(x) = 5 - x^3$

3. Wyznacz pochodną funkcji f i oblicz $f'(x_0)$.

a) $f(x) = x^2, x_0 = -3$ d) $f(x) = x^5, x_0 = -1$
 b) $f(x) = x^3, x_0 = 2$ e) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$
 c) $f(x) = x^4, x_0 = 0$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 1$

4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

a) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1$ d) $f(x) = x^2, x_0 = 4$
 b) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$ e) $f(x) = x^3, x_0 = -1$
 c) $f(x) = x^2, x_0 = -4$ f) $f(x) = x^3, x_0 = 2$

5. Wyznacz punkty $(x_0, f(x_0))$, w których styczna do wykresu funkcji f ma współczynnik kierunkowy równy a .

a) $f(x) = x^2, a = 1$ b) $f(x) = x^3, a = 9$ c) $f(x) = x^4, a = 4$

6. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f , które są równoległe do prostej $y = 12x + 1$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

7. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f , które są prostopadłe do prostej $y = 2x + 5$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

8. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Sprawdź, czy istnieją styczne do wykresu funkcji f , tworzące z osią OX kąt α . Jeżeli styczne istnieją, narysuj je, a następnie wyznacz ich równania, korzystając z interpretacji geometrycznej pochodnej. Porównaj otrzymane wyniki.

a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\alpha = 135^\circ$

Test jednokrotnego wyboru

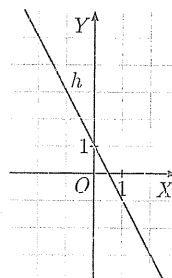
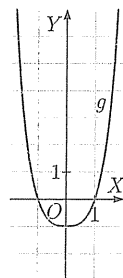
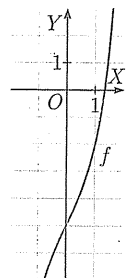
9. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(-2, -8)$ przecina oś OY w punkcie:
 A. $(0, 16)$, B. $(0, 24)$, C. $(0, 60)$, D. $(0, 96)$.
10. Proste prostopadłe k i l są styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punktach odpowiednio A i $B(2, 4)$. Współrzędne punktu A są równe:
 A. $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{64})$, B. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$, C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, D. $(-1, 1)$.

Zestaw II

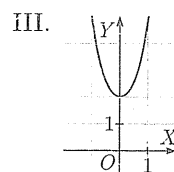
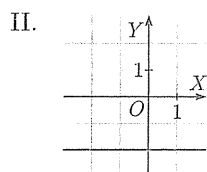
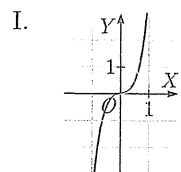
11. Znajdź odcięte dwóch punktów, w których funkcja f nie ma pochodnej.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(x+1) & \text{dla } x \leq -2 \\ \left| \frac{x-1}{x+4} \right| & \text{dla } |x| < 2 \\ \frac{1}{36}(5x-4) & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

12. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^3 + 2x - 5$, $g(x) = x^4 - 1$ i $h(x) = -2x + 1$.



Dopasuj do każdej z tych funkcji wykres jej pochodnej, pokazany na jednym z rysunków poniżej.



13. Oblicz pole czworokąta wypukłego leżącego w I ćwiartce układu współrzędnych i ograniczonego osiami układu oraz stycznymi do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punktach o odciętych $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$.

14. Poprowadzono styczne do paraboli $y = x^2$ w punktach przecięcia tej paraboli z prostą $y = a$. Dla jakich wartości parametru a te styczne są prostopadłe?

*5.10. Działania na pochodnych

Zestaw I

1. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.
 a) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 48$ c) $f(x) = -2x^2 + 5x^3 + 7x$
 b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x$ d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 7$
2. Wyznacz pochodną funkcji f dwoma sposobami: korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji oraz mnożąc czynniki przed liczeniem pochodnej.
 a) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x + 1)$ b) $f(x) = (5 - 2x)(x^3 - 2x^2 + 6)$
3. Wyznacz pochodną funkcji f .
 a) $f(x) = (4x - 2)(3x + 7)$ d) $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 5)(3x - x^2)$
 b) $f(x) = (5x^2 + 3x)(2 - x)$ e) $f(x) = (2x^3 - 5x + 3)(x^2 + x + 1)$
 c) $f(x) = (x^2 + 4)(x^2 + 7x)$ f) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)$
4. Wyznacz pochodną funkcji f .
 a) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ d) $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$ g) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2-3x+2}$
 b) $f(x) = \frac{x-4}{x+4}$ e) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x}$ h) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^3+8}$
 c) $f(x) = \frac{x^2+4x}{5-2x}$ f) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ i) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-1}{x^2}$
5. Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .
 a) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+3}$, $x_0 = -2$ b) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-9}$, $x_0 = 4$
6. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .
 a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$, $x_0 = 1$ c) $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+1}$, $x_0 = -1$
 b) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 2x$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = \frac{x^2+4}{(x+2)^2}$, $x_0 = 2$

7. Wyznacz pochodną funkcji f .
- $f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} + (x-4)(x^2+1)$
 - $f(x) = (x^2-1)(x+3) - (x-4)(x^2+1)$
 - $f(x) = \frac{2}{x}(x^2+3x-2) + 2x$
 - $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x} + \frac{x}{x+1}$
8. Czy istnieją styczne do wykresu funkcji f równoległe do prostej $y = -2x+7$? Jeśli istnieją, wyznacz odcięte punktów styczności.
- $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$
 - $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$
 - $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-1}$

Test jednokrotnego wyboru

9. Dana jest funkcja $f(x) = (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2)(x^3+x)$. Pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = -1$ jest równa:
- 1,
 - 0,
 - $\frac{1}{2}$,
 - 2.
10. Dane są funkcje $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ i $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Iloraz $\frac{g'(1)}{f'(1)}$ jest równy:
- 4,
 - 2,
 - 0,
 - 2.
11. Wskaż warunek, który jest spełniony dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
- $f'(3) < g'(3) < h'(3)$
 - $g'(3) < f'(3) < h'(3)$
 - $h'(3) < g'(3) < f'(3)$
 - $h'(3) < f'(3) < g'(3)$

Zestaw II

12. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+4x}{x-3}$. Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.
13. Dla jakiej wartości parametru m równanie $f'(x) = \frac{1}{f(0)}$ ma rozwiązanie?
- $f(x) = x^3 + 4x^2 + mx - 12$
 - $f(x) = \frac{x+m}{x-1}$
14. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Naskicuj wykres funkcji f' . Odczytaj z wykresu, dla jakich wartości parametru k równanie $f'(x) = k$ ma
- dwa rozwiązania dodatnie,
 - co najmniej jedno rozwiązanie dodatnie,
 - co najmniej jedno rozwiązanie, w tym dokładnie jedno dodatnie.

15. Wykaż, że prosta o równaniu $y = 3(1-x)$ jest wspólną styczną wykresów funkcji $f(x) = \frac{9x^2+3}{x^2+1}$ oraz $g(x) = (x^2-4)(x-1)$. Wyznacz współrzędne punktów styczności.
16. Wiedząc, że $(\sin x)' = \cos x$ i $(\cos x)' = -\sin x$, oblicz pochodną funkcji f .
- $f(x) = \operatorname{tg} x$
 - $f(x) = \operatorname{ctg} x$
 - $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$
 - $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
17. Przeczytaj informacje podane w ramce.

Kątem, pod jakim przecinają się wykresy dwóch funkcji, nazywamy kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$ zawarty między stycznymi do tych wykresów w punkcie przecięcia. Jeżeli oznaczmy współczynniki kierunkowe stycznych przez m_1 i m_2 , to:

- wykresy funkcji przecinają się pod kątem prostym, gdy $m_1 m_2 = -1$,
- $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$, gdy $m_1 m_2 \neq -1$.

W każdym z punktów przecięcia wykresów funkcji f i g wyznacz kąt, pod jakim te wykresy się przecinają.

- $f(x) = x^3$, $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$
- $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{3x+1}{(x+1)^3}$

*5.11. Interpretacja fizyczna pochodnej

Zestaw I

1. Punkt porusza się wzdłuż osi OX , a jego położenie w chwili t dane jest wzorem $x(t) = 4t^2 + t$, gdzie x wyrażone jest w metrach, a t – w sekundach. Oblicz średnią prędkość punktu od chwili t_1 do chwili t_2 .
- $t_1 = 0$ s, $t_2 = 1$ s
 - $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s
 - $t_1 = 0$ s, $t_2 = 2$ s
2. Położenie punktu na osi OX w chwili t opisuje wzór $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + 4$, gdzie x wyrażone jest w metrach, a t – w sekundach. Oblicz prędkość punktu w podanej chwili.
- $t = 1$ s
 - $t = 2$ s
 - $t = 3$ s
 - $t = 4$ s

3. Rowerzysta przejechał z miasta A do miasta B po prostoliniowej drodze długości 54 km. Po t godzinach jazdy jego odległość od miasta A była równa $s(t) = 36t - 6t^2$ kilometrów.
- Oblicz, ile czasu jechał rowerzysta.
 - Oblicz średnie prędkości rowerzysty w pierwszej i w drugiej godzinie jazdy oraz na całej trasie (w km/h).
 - Oblicz prędkość rowerzysty w chwili $t_1 = 1$ h oraz w chwili $t_2 = 2$ h (w km/h).
4. Położenia ciał A i B na osi OX w chwili t są opisane odpowiednio funkcjami $x_A(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ i $x_B(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + 10t + 5$, gdzie x_A i x_B wyrażone są w metrach, a t – w sekundach.
- Podaj współrzędne punktów, z których startują ciała A i B .
 - Oblicz odległość między tymi ciałami w chwilach $t_0 = 0$ s, $t_1 = 2$ s i $t_2 = 3$ s.
 - Podaj wzór na prędkość każdego z ciał w dowolnej chwili t .
 - Podaj przedział czasu, w którym ciało A porusza się szybciej niż ciało B .
5. Uzasadnij, że jeśli zależność drogi od czasu jest liniowa $s(t) = vt$, gdzie v jest wielkością stałą, to prędkość średnia w dowolnym przedziale czasu od chwili t_1 do t_2 oraz prędkość w dowolnej chwili t są równe v . Ruch taki nazywamy jednostajnym.
- Podaj wzór opisujący drogę, którą przebyła Ziemia w swoim ruchu dookoła Słońca w czasie n godzin. Zakładamy, że Ziemia porusza się ze średnią prędkością liniową równą 30 km/s.
 - Oblicz, jaką drogę pokonuje w tym ruchu Ziemia w ciągu jednej godziny lekcyjnej. Wynik porównaj ze średnicą Ziemi (około 12 800 km).

Test jednokrotnego wyboru

W poniższych zadaniach ujemne wartości funkcji v oznaczają, że punkt porusza się w kierunku przeciwnym do kierunku osi.

6. Punkt porusza się po osi OX . Jego położenie w chwili t jest opisane wzorem $x(t) = t^3 - 2t^2$, gdzie x wyrażone jest w metrach, a t – w sekundach. Niech $v(t)$ oznacza prędkość punktu w chwili t . Różnica $v(3) - v(2)$ jest równa:
- A. 10 m/s, B. 11 m/s, C. 12 m/s, D. 15 m/s.

7. Położenie punktu na osi OX opisane jest wzorem $x(t) = 15t^2 - t^3$, gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w sekundach. Obserwujemy położenie punktu przez pierwszych 13 sekund. W tym czasie największą prędkość punkt osiągnie w chwili:

A. $t = 1$ s, B. $t = 5$ s, C. $t = 10$ s, D. $t = 13$ s.

Zestaw II

8. Punkt porusza się wzdłuż osi, a jego prędkość w chwili t opisuje funkcja v , gdzie t wyrażone jest w sekundach, a v – w m/s. Oblicz przyspieszenie punktu w chwilach $t_1 = 2$ s i $t_2 = 5$ s.

a) $v(t) = 2t + t^2$

b) $v(t) = 2t^3 + 3t^2$

9. Przeczytaj informację w ramce.

Jeżeli funkcje f i g są ciągle w przedziale $\langle a; b \rangle$ i różniczkowalne w (a, b) oraz $f(a) = g(a)$ i $f(b) = g(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = g'(c)$.

Powyższe twierdzenie bywa nazywane **Twierdzeniem o koniach wyścigowych** i przedstawiane jest w formie:

Jeżeli dwa konie startują w tej samej chwili z tego samego miejsca i osiągają metę jednocześnie, to w przynajmniej jednej chwili muszą mieć taką samą prędkość.

Uzasadnij, że dla podanych funkcji f i g oraz przedziału $\langle a; b \rangle$ spełnione są założenia podane w powyższym twierdzeniu. Wyznacz $c \in (a, b)$, dla którego zachodzi $f'(c) = g'(c)$.

- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$,
 $g(x) = x^3 - 4x^2 + 24x - 20$,
 $a = 1, b = 3$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 5$,
 $g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 5$,
 $a = 0, b = 2$

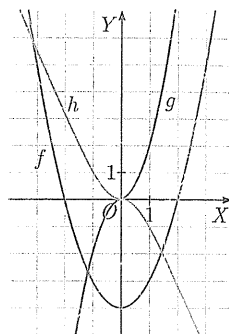


10. Zależność drogi s od czasu t w pewnym ruchu przyspieszonym wyraża się wzorem $s(t) = v_0 + \frac{1}{2}at^2$, gdzie v_0 jest prędkością początkową, natomiast a – wielkością stałą. Uzasadnij, że przyspieszenie w tym ruchu jest stałe i wynosi a .
11. Ruch, o którym mowa w zadaniu 10, nazywamy ruchem jednostajnie zmiennym. Oto przykład opisu takiego ruchu. Z dachu Empire State Building (wysokość 381 m) w Nowym Jorku upuszczono swobodnie kamień. Zakładamy, że kamień spadał ze stałym przyspieszeniem $g \approx 9,8 \frac{m}{s^2}$.
- Po jakim czasie kamień uderzył o ziemię?
 - Oblicz prędkość kamienia w chwilach $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s oraz $t_3 = 3$ s.

*5.12. Funkcje rosnące i malejące

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + x^3$ i $h(x) = \frac{-2x^3}{1+x^2}$. Która z tych funkcji jest rosnąca, która – malejąca, a która jest przedziałami monotoniczna? Sprawdź odpowiedź, badając znak pochodnej.



2. Wykaż, że funkcja f jest rosnąca.

- $f(x) = x^3 + 5x - 3$
- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$
- $f(x) = 3x^5 + 4x$

3. Sprawdź, czy funkcja f jest malejąca w całej swojej dziedzinie.

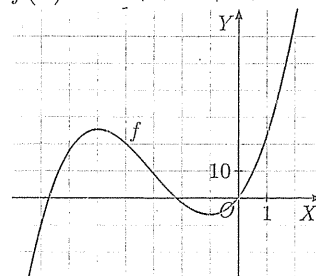
- $f(x) = -x^3 - 15x$
- $f(x) = 5 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3$
- $f(x) = -x^5 - x^3 - x$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

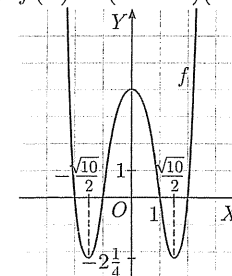
- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$
- $f(x) = x^3 + 9x^2 - 21x - 4$
- $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 1$
- $f(x) = 2 - 48x + 12x^2 - x^3$
- $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 2$
- $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 24x$

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu jej przedziały monotoniczności. Sprawdź odpowiedź, badając znak pochodnej.

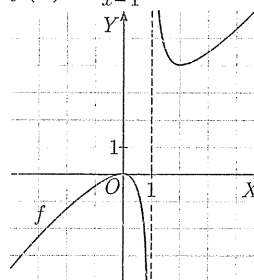
a) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x$



c) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$



b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$



6. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

- $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+7}$
- $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$
- $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{5-x}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
- $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$
- $f(x) = \frac{2x^2}{(x+3)^2}$

7. Sprawdź, dla jakiej wartości parametru m funkcja f jest rosnąca.

- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx + 19$
- $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 7$

8. Sprawdź, dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest malejąca.

- $f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 14$
- $f(x) = -5x^3 + kx + 10$

Test jednokrotnego wyboru

9. Funkcja $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + kx + 8$ nie jest monotoniczna dla:

- $k = -2$,
- $k = -\frac{1}{2}$,
- $k = 0$,
- $k = 3$.

10. Funkcja $f(x) = \frac{6x}{9x^2+1}$ jest funkcją rosnącą w przedziale:

- $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$,
- $\langle -3; 3 \rangle$,
- $\langle -3; 0 \rangle$,
- $\langle -\infty; -\frac{1}{3} \rangle$.

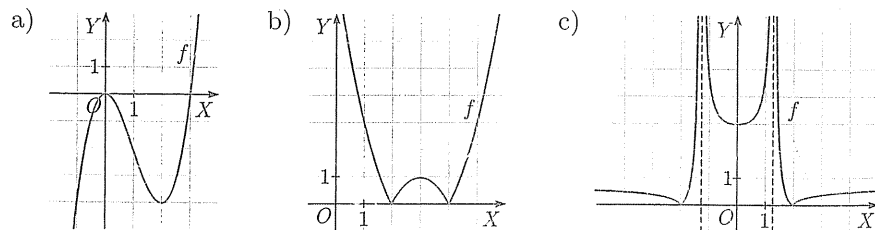
Zestaw II

11. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .
- a) $f(x) = \frac{1}{x} + x$ c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$
 b) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ d) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$
12. Uzasadnij, że równanie $x^3 + 7x = x^2 + 8$ ma dokładnie jeden pierwiastek należący do przedziału $(0; 2)$. Czy ten pierwiastek jest mniejszy od 1?
13. Niech $f(m)$ oznacza sumę dwóch różnych pierwiastków równania:
 $(m^2 + 1)x^2 - 4mx + 1 = 0$
 z niewiadomą x . Określ dziedzinę funkcji f . Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.
14. Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest podana nierówność.
 a) $\sin x < x$ b) $\operatorname{tg} x > x$ c) $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3$
15. Niech $V(x)$ oznacza objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości x i sumie długości wszystkich krawędzi równej 24. Wyznacz wzór funkcji V i określ jej dziedzinę. Podaj przedziały monotoniczności funkcji V .

*5.13. Ekstrema funkcji

Zestaw I

1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej ekstrema lokalne.

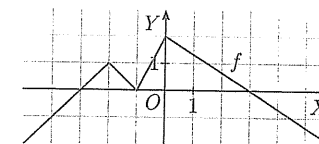


2. Wykaż, że funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0 .
- a) $f(x) = x^5 - 2x^2 + x - 4$, $x_0 = 1$
 b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 7$, $x_0 = 3$

3. Naskicuj wykres funkcji f , która:
- a) ma dwa maksima lokalne i jedno minimum lokalne,
 b) ma dwa maksima lokalne i nie ma minimum lokalnego,
 c) ma nieskończenie wiele minimów lokalnych i nie ma maksimum lokalnego.
4. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |x| + 2$ i znajdź punkt x_0 , w którym funkcja f przyjmuje minimum lokalne. Czy zachodzi warunek $f'(x_0) = 0$?
5. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f .
- a) $f(x) = x^3 - 12x - 3$ d) $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 11)$
 b) $f(x) = 5 - 21x - 12x^2 - x^3$ e) $f(x) = x^4 - 24x^2 - 64x + 100$
 c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x + 4$ f) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 1$
6. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f .
- a) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}$ e) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$
 b) $f(x) = \frac{-5}{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$
7. Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.
- a) $f(x) = x^3 - x^2 + 7x + 3$
 b) $f(x) = -x - x^3$
 c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
8. Wyznacz wartość parametru m , dla której funkcja f spełnia warunek $f'(x_0) = 0$. Czy dla tej wartości m funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne? Jeśli tak, to określ, czy jest to maksimum, czy minimum.
- a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + mx - 4$, $x_0 = 2$
 b) $f(x) = \frac{x + m}{x^2 - 4}$, $x_0 = 4$

Test jednokrotnego wyboru

9. Ile ekstremów lokalnych ma funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^3$?
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
10. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ile ekstremów lokalnych ma funkcja $g(x) = f(|x|)$?
- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3



11. Funkcja $f(x) = \frac{x^2-6x+4}{x^2+6x+4}$ ma maksimum lokalne w punkcie:

A. $x_0 = -2$, B. $x_0 = -1$, C. $x_0 = 1$, D. $x_0 = 2$.

Zestaw II

12. Sporządź wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ i podaj jej ekstrema lokalne.

13. Dla jakich wartości parametru k funkcja f nie ma ekstremum lokalnego?

a) $f(x) = kx^3 + (k-2)x + 4$ b) $f(x) = \frac{x^2+kx}{x^2-9}$

14. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji

$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

15. Wyznacz wartości a i b , dla których funkcja $f(x) = \frac{x^2-ax+b}{x-5}$ osiąga ekstremum lokalne równe 1 w punkcie $x_0 = 3$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum. Czy jest to jedyne ekstremum lokalne tej funkcji?

16. Zbadaj liczbę minimów lokalnych oraz maksimów lokalnych funkcji f w zależności od parametru k .

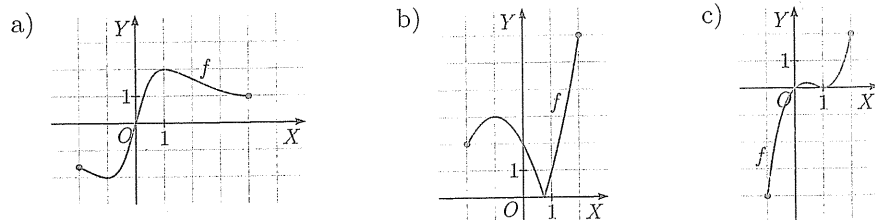
a) $f(x) = x^3 - 2kx^2 + kx + 7$ b) $f(x) = x^4 - kx^2$

17. Funkcja $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x}$ osiąga ekstrema lokalne w punktach x_1 i x_2 , a funkcja $g(x) = -\frac{x^2+3}{x^2+1}$ ma ekstremum lokalne w punkcie x_3 . Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ i $(x_3, g(x_3))$.

*5.14. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

Zestaw I

1. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f .



2. Na podstawie wykresu określ wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $\langle -1; 1 \rangle$ c) $f(x) = (x-1)^3$, $\langle -1; 2 \rangle$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $\langle -1; 2 \rangle$ d) $f(x) = 2 - (x+1)^2$, $\langle -2; 1 \rangle$

3. Wyznacz wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ w podanym przedziale.

a) $\langle -2; 0 \rangle$ b) $\langle 0; 2 \rangle$ c) $\langle -2; 4 \rangle$

4. Wyznacz wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji f w podanym przedziale.

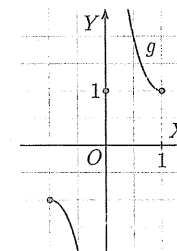
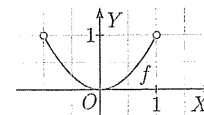
a) $f(x) = x^3 - 27x - 26$, $\langle -4; 2 \rangle$ c) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$, $\langle -1; 2 \rangle$
b) $f(x) = 10 + 2x^2 - x^4$, $\langle -2; 2 \rangle$ d) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$, $\langle 1; 2 \rangle$

5. Oblicz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f o podanej dziedzinie. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = -x^3 + 12x + 4$, $D = \langle 0; 3 \rangle$
b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x$, $D = \langle -2; 2 \rangle$
c) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3}$, $D = \langle -1; 1 \rangle$
d) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, $D = \langle 4; 7 \rangle$

6. Dla jakiej wartości parametru p najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^4 - 4x + p$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ wynosi 4?

7. Przypomnij twierdzenie Weierstrassa. Funkcje, których wykresy przedstawiono na rysunkach, nie przyjmują wartości najmniejszej lub największej. Wyjaśnij, dlaczego w ich przypadku twierdzenie Weierstrassa nie zachodzi.



Test jednokrotnego wyboru

8. Największa wartość funkcji $f(x) = \frac{10}{x^4-4x^2+6}$ jest równa:

A. 5, B. 6, C. 8, D. 10.

9. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{8x}{4x^2+9}$ jest przedział:
 A. $\langle -2; 2 \rangle$, B. $\langle -1; 1 \rangle$, C. $\langle -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \rangle$, D. $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$.

10. Oznaczmy przez M_1, M_2, M_3, M_4 największe wartości przyjmowane przez funkcję $f(x) = x^3 - 12x$ na przedziałach odpowiednio $\langle -3; -1 \rangle, \langle -1; 1 \rangle, \langle 1; 3 \rangle, \langle 3; 5 \rangle$. Wówczas:
 A. $M_4 < M_2 < M_1 < M_3$, C. $M_3 < M_2 < M_1 < M_4$,
 B. $M_4 < M_1 < M_2 < M_3$, D. $M_3 < M_1 < M_2 < M_4$.

Zestaw II

11. Znajdź $a > 0$ takie, że największa wartość funkcji $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 41$ w przedziale $\langle 0; a \rangle$ wynosi 3.

12. Znajdź wartość najmniejszą i wartość największą funkcji:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3ax^2}{(a^2 + 4)x^2 + 7}$$

w przedziale $\langle -5; 5 \rangle$.

13. Wyznacz wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 9x|$, $\langle -2; 4 \rangle$ b) $f(x) = |x|^3 - |x|$, $\langle -2; 2 \rangle$

- *14. Funkcja $g(k)$ przypisuje każdej liczbie $k > 0$ największą wartość danej funkcji f w przedziale $\langle 0; k \rangle$. Oblicz $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k)$.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

- *15. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = 4 \sin^3 x - 3 \sin^2 x - 6 \sin x + 1$

b) $f(x) = \frac{5 \sin x}{2 - \cos^2 x}$

16. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

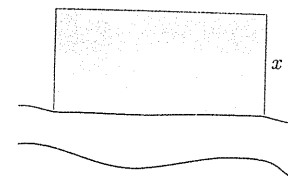
$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{64} + \dots$$

Dla jakich wartości parametru p równanie $f(x) = p$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$?

*5.15. Zagadnienia optymalizacyjne

Zestaw I

1. Rolnik planuje ogrodzić prostokątną łąkę, która przylega do rzeki, siatką o długości 120 metrów, przy czym brzeg łąki sąsiadujący z rzeką ma pozostać nieogrodzony (patrz rysunek).
 a) Niech x oznacza długość (w metrach) brzegu łąki prostopadłego do rzeki. Wyraż pole łąki jako funkcję zmiennej x . Określ dziedzinę i naszkicuj wykres tej funkcji.
 b) Wyznacz wartość zmiennej x , dla której pole łąki jest największe. Oblicz to pole.



2. Rozłóż liczbę 12 na sumę trzech składników tak, aby pierwszy z nich był o 1 mniejszy od drugiego i żeby suma kwadratów tych trzech składników była najmniejsza.

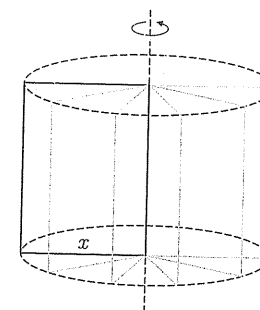
3. Określ szerokość okna, którego dolna część ma kształt prostokąta, a górna – trójkąt prostokątnego równoramiennego (patrz rysunek obok), wiedząc, że jego obwód jest równy 7 m i ma ono największe możliwe pole powierzchni.



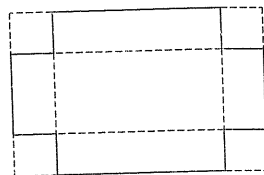
4. Chcemy sporządzić szkielec graniastosłupa prawidłowego czworokątnego tak, aby suma długości jego krawędzi wynosiła 72 cm i aby jego przekątna była możliwie najkrótsza. Jakie powinny być wymiary tej bryły?

5. Z kawałka drutu o długości 60 cm wykonano prostokątną ramkę. Ramka ta, obracając się wokół jednego z boków, zakreśla walec (patrz rysunek).

- a) Wyraż objętość walca jako funkcję zmiennej x , gdzie x oznacza promień podstawy walca, i określ dziedzinę tej funkcji.
 b) Wyznacz wartość zmiennej x , dla której objętość walca jest największa.

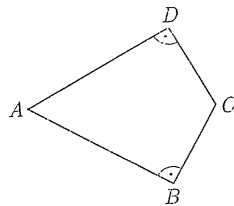


6. Przedstaw liczbę 8 jako sumę dwóch składników tak, aby:
- suma ich sześciątów była najmniejsza,
 - suma ich odwrotności była najmniejsza.
7. Oblicz wysokość i promień podstawy stożka o tworzącej długości 6, który ma największą objętość.
8. Oblicz wymiary, jakie powinno mieć tekturowe pudełko o pojemności 4 litrów, z kwadratowym dnem i bez górnej ścianki, jeśli chcemy zużyć jak najmniej tektury na jego wykonanie.
9. W rogach prostokątnego arkusza blachy o wymiarach 36 cm na 24 cm wycięto cztery przystające kwadraty i po zgięciu blachy wzdłuż linii zaznaczonych na rysunku otrzymano pudełko (bez górnej ścianki) o największej możliwej objętości. Oblicz wysokość pudełka. Podaj wynik z dokładnością do 1 mm.



Test jednokrotnego wyboru

10. Obwód deltoidu $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach B i D (rysunek obok) wynosi 36. Przekątna AC tego deltoidu jest najkrótsza, gdy długość przekątnej BD jest równa:
- A. $9\sqrt{2}$, B. 12, C. $12\sqrt{2}$, D. 16.



11. Punkty należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{x^2}$, których odległość od początku układu współrzędnych jest najmniejsza, należą również do wykresu funkcji:
- A. $y = 2|x|$, B. $y = \sqrt{2}|x|$, C. $y = |x|$, D. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}|x|$.

Zestaw II

12. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i promieniu r . Ile wynosi największe możliwe pole trójkąta OAB ?

13. Drut o długości a dzielimy na dwie części. Z pierwszej wykonujemy szkielet sześcianu, a z drugiej – szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i polu ściany bocznej dwukrotnie większym niż pole podstawy. W jakiej proporcji należy podzielić drut, aby suma objętości tych brył była najmniejsza?
14. Wyznacz w zależności od parametru a współrzędne punktu należącego do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ i leżącego najbliżej punktu $P(0, a)$.
15. Rozważmy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie $2p$. Obracając te trójkąty wokół podstawy, otrzymujemy bryły o różnych objętościach. Oznaczmy przez V_1 największą z tych objętości. Obracając dane trójkąty wokół osi symetrii, otrzymujemy stożki o różnych objętościach. Niech V_2 będzie największą z nich. Oblicz $V_1 : V_2$.

*5.16. Szkicowanie wykresu funkcji

Zestaw I

1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i naskicuj jej wykres.
- $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
 - $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$
 - $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
2. Odczytaj z wykresu funkcji f , dla jakich wartości parametru a równanie $f(x) = a$ ma dokładnie trzy różne pierwiastki.
- $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
 - $f(x) = x^4 - 2x^2$
 - $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$
3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i naskicuj jej wykres.
- $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$
 - $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$
4. Korzystając z wykresu funkcji f , podaj jej zbiór wartości.
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$
 - $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$
 - $f(x) = \left| \frac{x^2-9x}{x^2+27} \right|$
5. Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i naskicuj jej wykres.
- $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-1}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$
 - $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$

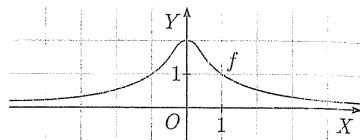
6. Posługując się wykresem funkcji f , ustal liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ c) $f(x) = \frac{3}{x^2-x+2}$

Test jednokrotnego wyboru

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$. Ile ekstremów lokalnych ma funkcja $g(x) = \frac{2}{(|x|-3)^2+1}$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



8. Ile asymptot pionowych ma wykres funkcji $f(x) = \frac{x^4+x^3-2x^2}{(x^2-1)(x^2-3)(x^2-4)}$?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

9. W którym z podanych przedziałów funkcja $f(x) = 32x^2 - x^4$ nie jest rosnąca?

A. $\langle -8; -6 \rangle$ B. $\langle -6; -4 \rangle$ C. $\langle 2; 4 \rangle$ D. $\langle 4; 6 \rangle$

Zestaw II

10. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x|x-1|}$.

11. Jaka wartość funkcji $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$ jest przyjmowana dokładnie dwukrotnie, dla argumentów różniących się o 10?

12. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji $g(x) = |2x^3 + 3x^2 - 12x| - m$ w zależności od wartości parametru m .

13. Niech $V(x)$ oznacza objętość walca, którego podstawa ma promień x , a pole powierzchni całkowitej wynosi 96π .

- a) Określ dziedzinę funkcji V .
b) Naskicuj wykres funkcji V i podaj jej zbiór wartości.
c) Czy można tak dobrać x , aby walec miał objętość 400?

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)^2$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{2x-2}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x}{3x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+2x+6}{x-2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{4-x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

g) $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2+4x}{x+1}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{2+x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^2-1}{2x+4}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^3}{4-x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x})$

2. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x}{x-9}$

b) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4x-5}$

3. Wyznacz punkty nieciągłości funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1 & \text{dla } x < 2 \\ 3x + 1 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3 \\ 7 - 2x & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x < -1 \\ 2 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ \frac{5}{x+4} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

4. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 4)$

g) $f(x) = \frac{x^2-4x}{5x+1}$

b) $f(x) = x^3 - 5$

e) $f(x) = (x - x^2)(3x^3 - 1)$

h) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+4}$

c) $f(x) = 7x^2 - 2x^4$

f) $f(x) = (5x^4 + 2x)(3x - 6)$

i) $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^2-3x+4}$

5. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

a) $f(x) = x^2 - 3x, x_0 = 0$

b) $f(x) = 4x - x^3, x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}, x_0 = 2$

6. Określ dziedzinę funkcji f . Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f .

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 41$

c) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+3x+3}$

b) $f(x) = -x^3 + 13x^2 - 48x + 50$

d) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+2x}$

7. Wyznacz wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \langle -1; 2 \rangle$

b) $f(x) = 4x^5 - 5x^4 - 20, \langle 0; 2 \rangle$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+3}, \langle 0; 3 \rangle$

d) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x-3}, \langle -2; 0 \rangle$

Zestaw II

8. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)-6}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4+(x+2)^4}{(x+2)^2+x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{\sqrt{2x^3+2x-1}-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{x^3+8}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|-1}{|x-1|}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{7}{(1-x^3)|x-1|}$

9. Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{3+x^2}}{x+5}$

b) $f(x) = \sqrt{9x^2+1}+3x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

10. Wyznacz dziedzinę i asymptoty funkcji f .

a) $f(x) = \frac{\sqrt{3+x^2}}{x+5}$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{(x-2)|x+1|}$

c) $f(x) = \frac{|x|}{|x|-1}$

11. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{dla } x < -2 \\ ax+b & \text{dla } |x| \leq 2 \\ 2x^2-4x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2 & \text{dla } x < -2 \\ \frac{b^2-b-1}{b} & \text{dla } x = -2 \\ \frac{\sqrt{3+x}-1}{x+2} & \text{dla } x > -2 \end{cases}$

12. Dla jakich wartości parametru m zachodzi nierówność $f'(-2) \leq 0$?

a) $f(x) = x^4 - (m-2)^2x + 5$

b) $f(x) = \frac{mx-1}{x^2+3}$

c) $f(x) = \frac{x^2+mx}{x-2}$

13. Funkcja $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 27$ opisuje położenie punktu na osi liczbowej w chwili t . W jakich chwilach t punkt ten znajduje się na dodatniej półosi i porusza się w kierunku 0?

14. Dla jakich wartości parametru a funkcja:

$$f(x) = ax^3 + (3-2a)x^2 - 4x + 3$$

jest rosnąca tylko w przedziale $\langle \frac{1}{3}; 2 \rangle$?

15. Funkcja $f(x) = x + \frac{9}{x}$ osiąga ekstrema lokalne dla x_1 i x_2 . Oznaczmy punkty $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$. Oblicz długość odcinka AB .

16. Blaszany pojemnik w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego bez górnej ścianki ma mieć pojemność 12 litrów. Ścianki boczne mają być wykonane z materiału trzy razy tańszego niż materiał na podstawę. Jakie wymiary powinien mieć ten pojemnik, aby koszt jego wykonania był możliwie najmniejszy?

17. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+4x}$ i narysuj jej wykres. Określ, dla jakich wartości parametru m równanie:

$$\frac{x^2+2}{x^2+4x} = m$$

ma rozwiązanie.

Zestaw III

18. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos 2x}{\sin x + \cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) \cos x$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - 2x \right)$

19. Rozważmy stożek o promieniu podstawy równym 1 i wysokości równej x . Niech $g(x)$ oznacza stosunek promienia kuli opisanej na tym stożku do promienia kuli wpisanej w ten stożek. Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$.

20. Wyznacz x_0 tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+1} & \text{dla } x < x_0 \\ \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} & \text{dla } x \geq x_0 \end{cases}$$

była ciągła.

21. Wyznacz te wartości parametru a , dla których parabola $y = -x^2 + ax$ ma w punkcie przecięcia z osią OX styczną nachyloną do tej osi pod kątem 30° .

22. Korzystając z definicji, wyprowadź wzór na pochodną funkcji f . Podaj konieczne założenia.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

23. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ b) $f(x) = \frac{1}{|x^3-4|}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{|x|-4}$

24. Wyznacz wszystkie liczby całkowite m takie, że funkcja:

$$f(x) = x^3 - 3mx + 4$$

osiąga minimum dla argumentu x_0 należącego do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{x-5}{x-3} \leq \frac{3x-1}{2-x}$.

25. Wyznacz liczbę miejsc zerowych funkcji:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + kx + k$$

w zależności od wartości parametru k .

6. Planimetria

6.1. Długość okręgu i pole koła

Zestaw I

1. Oblicz długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α , jeśli:

a) $r = 3$, $\alpha = 60^\circ$, b) $r = 4$, $\alpha = 80^\circ$, c) $r = 6$, $\alpha = 258^\circ$.

2. Oblicz pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez dany kąt.

a) 30° b) 45° c) 252° d) $49^\circ 30'$

3. W okręgu o średnicy 12 cm poprowadzono trzy promienie tak, że stosunek miar kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1 : 3 : 4$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez końce tych promieni leżące na okręgu.

4. Długość łuku okręgu wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 80° jest równa 4π . Oblicz promień okręgu i pole wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt.

5. Koło o promieniu 3 podzielono na trzy wycinki. Pola dwóch z nich są równe 2π i 5π . Oblicz długość łuku odpowiadającego trzeciemu wycinkowi.

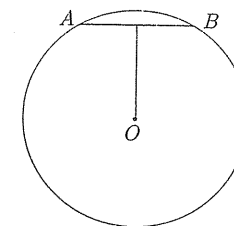
6. Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α jest równe 12π , a długość łuku odpowiadającego temu wycinkowi wynosi 4π . Oblicz miarę kąta α .

7. Obwód wycinka koła wynosi 6 cm, a pole tego wycinka jest równe 2 cm^2 . Oblicz promień koła i długość łuku odpowiadającego temu wycinkowi.

8. W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB o długości 4 jak na rysunku obok. Odległość środka okręgu od prostej zawierającej tę cięciwę wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz:

a) długości łuków, na jakie ta cięciwa podzieliła okrąg,

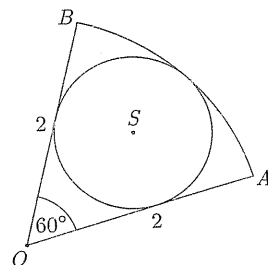
b) pole zaznaczonego odcinka koła.



Test jednokrotnego wyboru

9. Na rysunku przedstawiono wycinek koła o promieniu 2, wyznaczony przez kąt środkowy 60° . Okrąg o środku w punkcie S jest styczny do odcinków OA i OB oraz do łuku $\widehat{AB}$. Wskaż długość tego okręgu.

- A. $\frac{2}{3}\pi$ C. $1\frac{1}{3}\pi$
B. π D. $1\frac{2}{3}\pi$



10. Cięciwa o długości $6\sqrt{3}$ cm podzieliła koło o promieniu 6 cm na dwie figury. Pole jednej z nich jest równe:

- A. $(9\sqrt{3} + 12\pi)$ cm², C. $(12\pi - 9\sqrt{3})$ cm²,
B. $(12\sqrt{3} + 12\pi)$ cm², D. $(12\pi - 12\sqrt{3})$ cm².

11. Duża wskazówka zegara ma 12 cm długości. Droga, jaką przebędzie koniec tej wskazówki w czasie 1 godziny i 5 minut, wynosi:

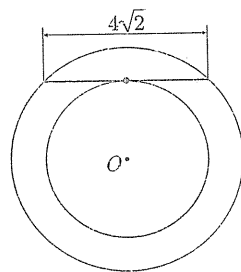
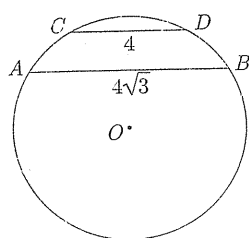
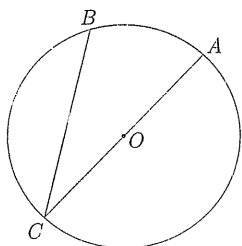
- A. 26π cm, C. $\frac{7}{4}\pi$ cm,
B. 4π cm, D. $\frac{13}{6}\pi$ cm.

Zestaw II

12. Cięciwa dzieli okrąg na dwa łuki, których stosunek długości wynosi 5 : 7. Oblicz stosunek pól odcinków koła wyznaczonych przez tę cięciwę.

13. Promień okręgu o środku O jest równy 4. Korzystając z podanych informacji, oblicz pole zacieniowanej figury.

- a) $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ b) $AB \parallel CD$ c) O jest środkiem obu okręgów.



14. W wycinek koła o promieniu R wpisano koło o promieniu r . Podaj:

- a) zależność między promieniami r i R , jeśli wycinek jest wyznaczony przez kąt 60° ,
b) pole wycinka w zależności od R , jeśli stosunek pól kół wynosi $3 + 2\sqrt{2}$.

- *15. W wycinek koła o środku O , ograniczony promieniami OA i OB oraz łukiem $\widehat{AB}$, wpisano kwadrat. Oblicz stosunek pola kwadratu do pola wycinka, jeśli $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ oraz:

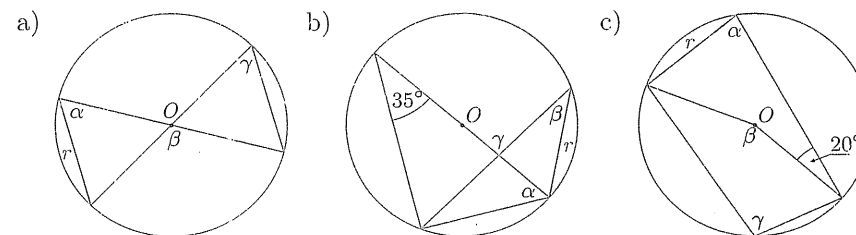
- a) trzy wierzchołki kwadratu należą do ramion kąta AOB , a czwarty – do łuku $\widehat{AB}$,
b) dwa wierzchołki kwadratu należą do ramion kąta AOB , a pozostałe – do łuku $\widehat{AB}$.

16. Obwód wycinka koła jest równy $2p$. Wyznacz promień tego koła, wiedząc, że pole wycinka jest największe z możliwych.

6.2. Kąty w okręgu

Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r . Wyznacz miary kątów: α , β i γ .

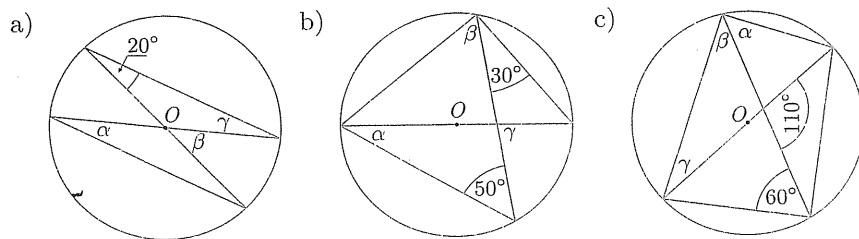


2. Wycinek koła jest wyznaczony przez kąt środkowy β . Kąt wpisany oparty na tym samym łuku co β ma miarę α . Oblicz, jaki procent pola koła stanowi pole wycinka, jeśli:

- a) $\alpha + \beta = 90^\circ$, b) $\beta - \alpha = 110^\circ$.
Wynik podaj z dokładnością do 1%.

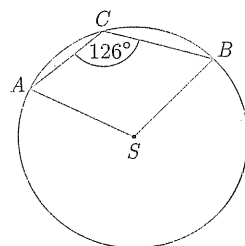
3. Na okręgu o środku O obrano punkty: A , B i C . Dwusieczna kąta CAB przecina okrąg w punkcie D . Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABDC$, jeśli $\sphericalangle ABC = 70^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 50^\circ$.

4. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Wyznacz miary kątów: α , β i γ .



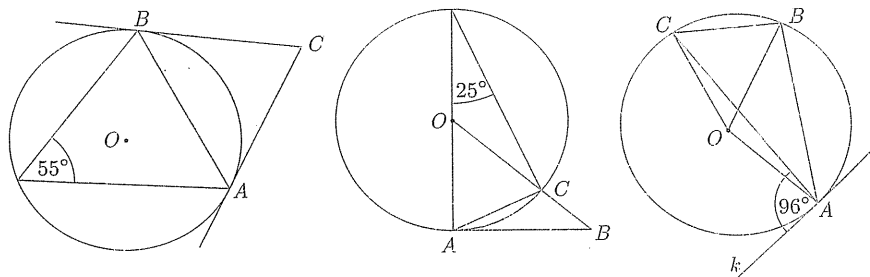
5. W kole o środku S i promieniu $2\sqrt{3}$ narysowano czworokąt $ASBC$ (rysunek obok). Oblicz pole zaznaczonego wycinka koła.

6. Z punktu A leżącego na okręgu o promieniu 5 cm poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i AC . Każda z nich wyznaczyła dwa odcinki koła. Oblicz sumę pól dwóch najmniejszych odcinków koła, wiedząc, że $|AB| = 2|AC|$.



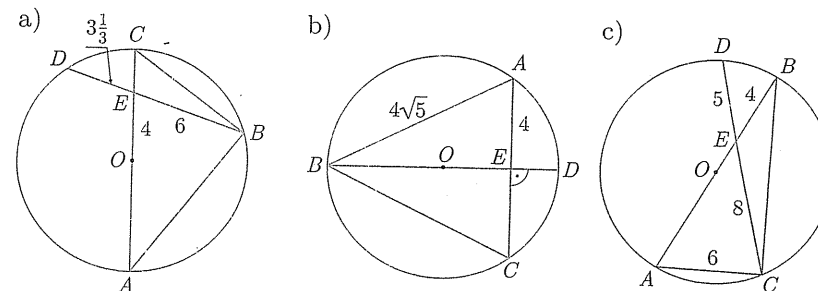
7. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC , korzystając z podanych informacji.

- a) $OA \perp AC$, $OB \perp BC$ b) $OA \perp AB$ c) $k \perp OA$, $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle BOC$



8. Wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB leżą na okręgu. Oblicz miary kątów tego trójkąta, jeśli kąt między bokiem BC a prostą styczną do okręgu w punkcie B ma miarę 40° .

9. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Oblicz promień r okręgu i pole trójkąta ABC .



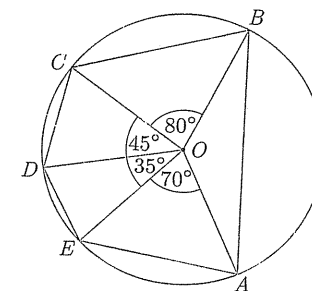
10. W okręgu poprowadzono dwie przecinające się cięciwy. Punkt przecięcia podzielił jedną z nich na odcinki długości 4 cm i 6 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie została podzielona druga cięciwa, jeśli ich stosunek wynosi $3 : 4$.

11. Dany jest okrąg o promieniu 7. Przez punkt P , którego odległość od środka okręgu jest równa 3, poprowadzono cięciwę o długości 13. Oblicz długości odcinków, na jakie punkt P dzieli tę cięciwę.

12. Na rysunku obok przedstawiono pięciokąt $ABCDE$ wpisany w okrąg o środku O . Oblicz miary kątów tego pięciokąta.

13. Dane są dwa wielokąty foremne: pięciokąt i sześciokąt.

- a) Oblicz sumę miar ich kątów wewnętrznych.
b) Wyznacz miary kątów między sąsiednimi przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka.



14. Do dwóch sąsiednich wierzchołków wielokąta foremnego poprowadzono przekątne wychodzące z tego samego wierzchołka. Miara kąta między tymi przekątnymi wynosi 15° . Wyznacz liczbę boków tego wielokąta i oblicz miarę jego kąta wewnętrznego.

15. Oblicz, jaki procent pola koła opisanego na n -kącie foremnym stanowi pole koła wpisanego w ten n -kąt, jeśli:

- a) $n = 6$, b) $n = 8$.

16. Oblicz pole sześciokąta foremnego, którego obwód jest:

- o 8 krótszy od długości okręgu opisanego na tym sześciokącie,
- o $2\sqrt{3} - \pi$ dłuższy od długości okręgu wpisanego w ten sześciokąt.

Test jednokrotnego wyboru

17. Na rysunku przedstawiono okrąg o środku O . Miara kąta α jest równa:

- A. 60° , B. 70° , C. 80° , D. 140° .

18. Promień okręgu jest równy 4. Wskaż długość łuku tego okręgu, na którym jest oparty kąt wpisany o mierze 45° .

- A. $\frac{2}{3}\pi$ B. π C. $\frac{4}{3}\pi$ D. 2π

19. Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta jest równa 6660° . Ile boków ma ten wielokąt?

- A. 36 B. 37 C. 38 D. 39

20. W okręgu o długości 12π poprowadzono cięciwę BD i średnicę AC zawartą w symetralnej tej cięciwy. Jeśli $|BD| = 6\sqrt{2}$, to jeden z kątów czworokąta $ABCD$ ma miarę:

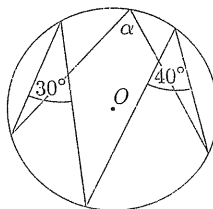
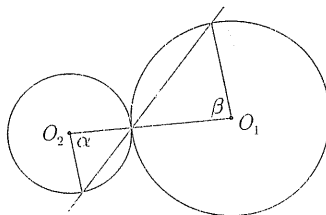
- A. 30° , B. 45° , C. 75° , D. 105° .

21. Dwunastokąt foremny o sąsiednich wierzchołkach P i Q wpisano w okrąg. Kąt oparty na łuku $\widehat{PQ}$ wpisany w ten okrąg może mieć miarę:

- A. 144° , B. 150° , C. 154° , D. 165° .

Zestaw II

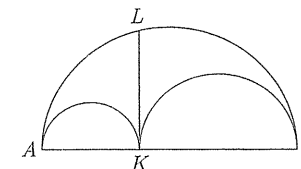
22. Przez punkt styczności dwóch okręgów stycznych zewnętrznie poprowadzono prostą sieczną tych okręgów (rysunek obok). Uzasadnij, że kąty środkowe α i β oparte na łukach wyznaczonych przez tę prostą i leżących po jej przeciwnych stronach są równe. Sformułuj i udowodnij podobne stwierdzenie dla okręgów stycznych wewnętrznie.



23. Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie w punkcie A i prosta styczna do tych okręgów w punktach B i C . Wykaż, że $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

24. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość CD . Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że $\sphericalangle ACD = \sphericalangle SCB$.

25. Na średnicy AB półkola obrano punkt K i narysowano dwa półkola o średnicach AK i KB (rysunek obok). Wykaż, że pole zacieniowanej figury jest równe polu koła, którego średnicą jest odcinek KL prostopadły do średnicy AB .



26. W okręgu o promieniu r poprowadzono prostopadłe cięciwy AB i CD . Wykaż, że $|AC|^2 + |BD|^2 = 4r^2$.

6.3. Okrąg opisany na trójkącie

Zestaw I

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, wiedząc, że:

- pole trójkąta wynosi 8 cm^2 , a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm ,
- krótsza przyprostokątna ma długość 5 cm , a jeden z kątów ostrych trójkąta jest dwa razy większy od drugiego,
- trójkąt jest równoramienny, a jego obwód wynosi 6 .

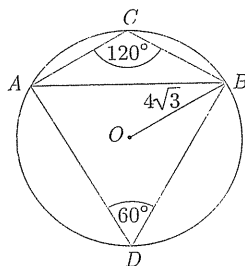
2. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, wiedząc, że:

- pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe 25π , a stosunek długości przyprostokątnych wynosi $1 : 7$,
- odległości środka okręgu opisanego na tym trójkącie od prostych zawierających przyprostokątne wynoszą 4 i 6 .

3. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie długości 8 cm , wiedząc, że:

- ramię trójkąta ma długość $4\sqrt{5} \text{ cm}$,
- sinus kąta przy podstawie trójkąta jest równy $\frac{3}{5}$.

4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano dwa trójkąty równoramiennie ABC i ABD o wspólnej podstawie i kątach między ramionami odpowiednio 120° i 60° jak na rysunku obok. Oblicz:



- długość wspólnej podstawy AB ,
 - pole każdego z trójkątów.
5. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym:
- o ramieniu b i kącie α przy podstawie,
 - o wysokości h opuszczonej na podstawę i kącie 2α między ramionami.

Test jednokrotnego wyboru

6. Jaki procent pola koła, z dokładnością do 1%, stanowi pole trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?
- A. 41% B. 52% C. 87% D. 95%
7. Na trójkącie równoramiennym o kącie 30° przy podstawie opisano koło. Jaki procent pola tego koła, z dokładnością do 1%, stanowi pole trójkąta?
- A. 14% B. 18% C. 20% D. 24%

Zestaw II

8. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie prostokątnym do pola tego trójkąta, jeśli:
- wysokość trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku $1 : 4$,
 - symetralna przeciwprostokątnej trójkąta dzieli jedną z jego przyprostokątnych w stosunku $1 : 2$.
9. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy różnicy długości przyprostokątnych tego trójkąta. Oblicz tangens większego z kątów ostrych trójkąta.
10. W koło o polu πS wpisano trójkąt równoramienny. Miara kąta przy podstawie tego trójkąta jest równa α . Wyznacz jego pole.

11. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym suma długości ramienia i wysokości opuszczonej na podstawę wynosi p , a miara kąta przy podstawie jest równa α . Wykaż, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

$$R = \frac{p}{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}$$

12. Wyznacz współrzędne środka S oraz promień R okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach A , B i C .
- $A(-6, -6)$, $B(8, 8)$, $C(-8, 0)$
 - $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(1, 6)$
 - $A(-3, 1)$, $B(3, -5)$, $C(5, 1)$
 - $A(1, -2)$, $B(4, 7)$, $C(-5, 10)$

6.4. Okrąg wpisany w trójkąt

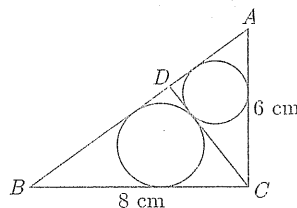
Zestaw I

1. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, wiedząc, że:
- przyprostokątne trójkąta mają długość 7 cm i 1 cm,
 - miara jednego z kątów ostrych trójkąta wynosi 30° , a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta jest równa 8 cm,
 - środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 5 cm, a stosunek długości przyprostokątnych trójkąta wynosi $1 : 2$.
2. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt prostokątny, wiedząc, że wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 2 i 6.
3. Na okręgu o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny. Oblicz jego pole, jeśli odległość między środkiem okręgu a wierzchołkiem jednego z kątów ostrych trójkąta wynosi $2\sqrt{10}$.
4. W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg o środku O . Punkt D i E są punktami styczności okręgu oraz odpowiednio podstawy AB i ramienia BC . Uzasadnij, że trójkąty BCD i OCE są podobne. Oblicz promień okręgu, jeśli:
- $|AB| = 4$, $|BC| = 2\sqrt{10}$,
 - $|CD| = 3$, $|BE| : |EC| = 1 : 2$.
5. W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz długości boków trójkąta.

6. Na okręgu opisano trójkąt równoramienny o podstawie długości 8. Oblicz promień tego okręgu, jeśli:
- jego środek dzieli wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę w stosunku $2 : 3$, licząc od podstawy,
 - środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę w stosunku $3 : 5$, licząc od podstawy.
7. a) Wyznacz pole pierścienia kołowego ograniczonego przez okrąg opisany na trójkącie równobocznym o boku a i okrąg wpisany w ten trójkąt.
b) Pole trójkąta równobocznego jest równe S . Wyznacz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
8. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 2. Punkty styczności okręgu z bokami trójkąta podzieliły okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi $3 : 4 : 5$. Oblicz pole trójkąta.
9. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt, jeśli:
- dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm, a miara kąta między nimi wynosi 60° ,
 - boki trójkąta mają długości 3 cm, 5 cm i 6 cm.

Test jednokrotnego wyboru

10. Wskaż różnicę promieni okręgów opisanego na trójkącie i wpisanego w trójkąt o bokach długości 7 cm, 24 cm i 25 cm.
A. 12,5 cm B. 9,5 cm C. 9 cm D. 3 cm
11. W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° wpisano okrąg o średnicy 12. Podstawa tego trójkąta ma długość:
A. $6 + 4\sqrt{3}$. B. $9\sqrt{3}$, C. $12\sqrt{3}$, D. $24 + 12\sqrt{3}$.
12. Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obok jest prostokątny, a odcinek CD jest jego wysokością. Suma pól kół wpisanych w trójkąty ACD i BCD wynosi:
A. $4\pi \text{ cm}^2$, C. $6\pi \text{ cm}^2$,
B. $5\pi \text{ cm}^2$, D. $8\pi \text{ cm}^2$.



13. Dany jest trójkąt ABC . Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C jest równa 20 cm i dzieli bok AB na odcinki długości 15 cm i 48 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. 8 cm, B. 9 cm, C. 10 cm, D. 12 cm.

Zestaw II

14. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu opisanego na tym trójkącie i okręgu wpisanego w ten trójkąt.
15. Wykaż, że stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o kącie między ramionami równym 2α do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi:

$$\frac{\sin \alpha + 1}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

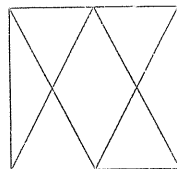
16. Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 3 cm i 5 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 1 cm. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta.
17. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą l prostopadłą do jednego z ramion. Następnie wpisano w ten kąt dwa koła, każde styczne do jego ramion i do prostej l . Wyznacz stosunek pól tych kół.
18. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta przechodząca przez punkty C i S przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D . Wykaż, że trójkąt BDS jest równoramienny.

6.5. Czworokąty wypukłe

Zestaw I

1. Oblicz wysokość h i pole P rombu, o którym wiadomo, że:
- miara jego kąta ostrego wynosi 60° , a bok ma długość 16 cm,
 - jego dłuższa przekątna ma długość 6 cm i nachylona jest do podstawy pod kątem 30° .

2. W kwadrat o przekątnej długości 12 cm wpisano dwa trójkąty równoramienne. Podstawami tych trójkątów są przeciwległe boki kwadratu, a wierzchołki między ramionami są środkami boków kwadratu, jak na rysunku obok. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.



3. a) Długości boków równoległoboku wynoszą 5 cm i 8 cm, a wysokość opuszczona na dłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz długości przekątnych równoległoboku.
b) Długości przekątnych równoległoboku są równe 8 cm i 12 cm, a kąt między nimi ma miarę 60° . Oblicz pole tego równoległoboku.
4. Dłuższy bok równoległoboku ma długość 6 cm, wysokość poprowadzona do tego boku jest równa $2\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona na krótszy bok jest równa $3\sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta ostrego i obwód tego równoległoboku.
5. Podstawy trapezu równoramienne mają długości 10 cm i 6 cm. Oblicz długość ramienia i pole trapezu, jeśli:
a) kąt rozwarty trapezu ma miarę 150° ,
b) przekątna tego trapezu jest prostopadła do ramienia.
6. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego ma długość d i tworzy z podstawą kąt 30° . Wyznacz obwód trapezu, jeśli:
a) jedna z jego podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej,
b) jego pole wynosi $\frac{\sqrt{3}}{2}d^2$.
7. W trapezie o podstawach długości 12 cm i 4 cm miary kątów przy dłuższej podstawie są równe α i β . Wyznacz pole tego trapezu.
8. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $|AB| = 6\sqrt{3}$ i $|AD| = |DC|$. Przekątna AC ma długość 8 i tworzy z podstawą AB kąt o mierze 30° . Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Oblicz:
a) długości ramion trapezu,
b) stosunek pola trójkąta ABS do pola trójkąta CDS .
9. Punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli jego wysokość równą 10 cm w stosunku $2:3$. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli jego pole wynosi 150 cm^2 .

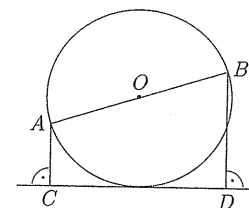
10. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkt S jest punktem przecięcia jego przekątnych. Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|AB| = 12 \text{ cm}$ i $|CD| = 4 \text{ cm}$, a pole trójkąta BCS jest równe 5 cm^2 .

Test jednokrotnego wyboru

11. Pole rombu, którego kąt ostry ma miarę mniejszą niż 30° , a obwód wynosi $8\sqrt{2}$, może być równe:
A. $6\sqrt{2}$, B. $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$, C. $2\sqrt{6}$, D. $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$.
12. Stosunek długości przekątnych rombu wynosi $2:1$, a wysokość rombu jest równa 4 cm. Wskaż pole tego rombu.
A. 12 cm^2 B. 16 cm^2 C. 20 cm^2 D. 24 cm^2
13. Suma długości przekątnych deltoidu wynosi 13 cm, a jego pole jest równe 21 cm^2 . Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku $3:4$. Jaką długość może mieć jeden z boków deltoidu?
A. 5 cm B. 4 cm C. $2\sqrt{3} \text{ cm}$ D. 3 cm

Zestaw II

14. Bok rombu $ABCD$ ma długość 13 cm, a przekątna AC jest równa 10 cm. Oblicz długość przekątnej BD i sinus kąta DAB .
15. Z punktu P , będącego środkiem ramienia BC trapezu $ABCD$, poprowadzono odcinki do wierzchołków A i D . Wykaż, że pole trójkąta APD jest dwa razy mniejsze od pola trapezu.
16. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie O . Wyznacz pole tego trapezu, wiedząc, że pole trójkąta ABO jest równe S_1 , a pole trójkąta CDO wynosi S_2 .
17. Odcinek AB jest średnicą okręgu przedstawionego na rysunku obok, a prosta l – styczną do tego okręgu. Z punktów A i B poprowadzono odcinki AC i BD prostopadłe do prostej l . Wykaż, że:
 $|AB| = |AC| + |BD|$.

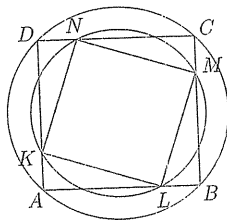


18. Dany jest romb $ABCD$ o kątach ostrych przy wierzchołkach A i C . Okrąg o środku O przechodzi przez punkty A, B i D i przecina przekątną AC w punkcie S , dzieląc ją na odcinki długości 4 i 2. Oblicz obwód rombu.
19. Wykaż, że kąt ostry między wysokościami równoległoboku poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego jest równy kątowi ostremu tego równoległoboku.
20. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie O , a proste zawierające ramiona tego trapezu – w punkcie S . Wykaż, że prosta SO przechodzi przez środki obu podstaw trapezu.
21. Trapez o wysokości 8 cm i podstawach długości 17 cm i 7 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwie figury o równych polach. Oblicz długości odcinków, na jakie ta prosta podzieliła wysokość trapezu.

*6.6. Okrąg opisany na czworokącie

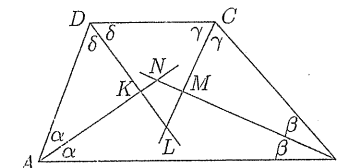
Zestaw I

1. W kwadrat $ABCD$ o boku długości 4 wpisano czworokąt $KLMN$, jak pokazano na rysunku. Każdy z wierzchołków tego czworokąta dzieli odpowiedni bok kwadratu $ABCD$ w stosunku 1 : 3. Uzasadnij, że czworokąt $KLMN$ jest kwadratem i oblicz stosunek pola koła opisanego na kwadracie $KLMN$ do pola koła opisanego na kwadracie $ABCD$.



2. Pole prostokąta jest równe $16\sqrt{3}$, a miara kąta między jego przekątnymi wynosi 60° . Oblicz pole koła opisanego na tym prostokącie.
3. Oblicz obwód trapezu wpisanego w okrąg o promieniu 3 cm, wiedząc, że dłuższa podstawa trapezu jest średnicą tego okręgu oraz:
- miara kąta między promieniami okręgu poprowadzonymi do końców krótszej podstawy wynosi 60° ,
 - przekątna trapezu ma długość $2\sqrt{7}$ cm.

4. Dłuższa podstawa AB trapezu $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym trapezie. Oblicz promień okręgu, wiedząc, że $|AD| = 3$ cm i $|AC| = 4\sqrt{7}$ cm.
5. Na trapezie o podstawach długości 9 cm i 7 cm oraz wysokości $2\sqrt{2}$ cm opisano okrąg. Oblicz długość tego okręgu.
6. Na trapezie o podstawach a i b , gdzie $a < b$, opisano okrąg o promieniu R . Kąt między krótszą podstawą trapezu a promieniem okręgu poprowadzonym do jednego z jego końców jest równy 30° . Oblicz a i R , jeśli $b = 8\sqrt{2}$, a wysokość trapezu jest równa 5.
7. Na deltoidzie o bokach długości 2 i 4 opisano okrąg. Oblicz jego promień R i odległość x środka okręgu od punktu przecięcia przekątnych deltoidu.
8. Na czworokącie $ABCD$, w którym $\angle ABC = 90^\circ$ oraz $\angle DAB = 75^\circ$, opisano koło. Wyznacz stosunek pola tego koła do pola czworokąta, jeśli długość boku BC jest równa promieniowi koła.
9. Dwieścienne kątów wewnętrznych trapezu $ABCD$ ograniczają czworokąt $KLMN$, jak pokazano na rysunku obok. Uzasadnij, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

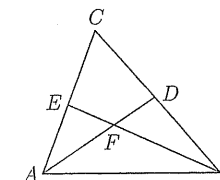


10. Dwa przeciwległe boki czworokąta wpisanego w okrąg mają równe długości. Wykaż, że czworokąt ten jest trapezem.

Test jednokrotnego wyboru

11. Odcinki AD i BE są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC przedstawionego na rysunku obok. Na czworokącie $EFDC$ można opisać okrąg, jeśli miara kąta ECD wynosi:

A. 30° , B. 45° , C. 60° , D. 70° .



12. Na czworokącie, którego sąsiednie kąty mają miary $107^\circ 15'$ i $93^\circ 25'$, można opisać okrąg. Wartość bezwzględna różnicy miar pozostałych dwóch kątów tego czworokąta jest równa:
- A. $13^\circ 10'$, B. $13^\circ 50'$, C. $14^\circ 10'$, D. $14^\circ 50'$.

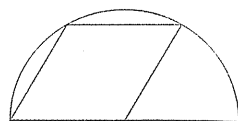
13. Na trapezie o dłuższej podstawie równej 8 cm i wysokości $\sqrt{3}$ cm opisano okrąg. Jeden z kątów tego trapezu jest jedenaście razy mniejszy od sumy miar pozostałych kątów. Wskaż pole trapezu.

A. $4\sqrt{3}$ cm² B. $5\sqrt{3}$ cm² C. $6\sqrt{3}$ cm² D. $8\sqrt{3}$ cm²

Zestaw II

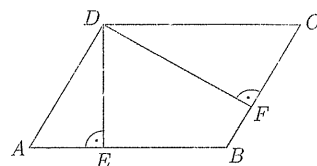
14. W półkole o promieniu r wpisano romb, jak pokazano na rysunku obok.

- a) Wyznacz długości przekątnych i pole rombu.
b) Oblicz sinus kąta ostrego rombu.



15. Na trapezie równoramiennym o krótszej podstawie 8 cm i wysokości 4 cm opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz tangens kąta ostrego trapezu. Podaj przybliżoną miarę tego kąta.

16. Z wierzchołka D kąta rozwartego równoległoboku $ABCD$ poprowadzono wysokości DE i DF , jak na rysunku obok. Wykaż, że na czworokącie $EBFD$ można opisać okrąg. Oblicz promień tego okręgu, jeśli $\sphericalangle DAB = 60^\circ$, $|AB| = 8$ i $|AD| = 6$.



17. Na trapezie o podstawach 8 cm i $4\sqrt{6}$ cm opisano okrąg o promieniu 5 cm. Środek tego okręgu leży wewnątrz trapezu. Oblicz:

- a) długość ramienia trapezu,
b) odległości środka okręgu od wszystkich prostych zawierających boki tego trapezu.

18. W okrąg o promieniu r wpisano prostokąt. Wyznacz długości jego boków, wiedząc, że pole prostokąta jest największe z możliwych.

19. Rozważmy wszystkie trapezy wpisane w okrąg o promieniu r , których dłuższa podstawa jest równa średnicy tego okręgu. Wykaż, że istnieje wśród nich trapez o polu większym niż $1,25r^2$.

*6.7. Okrąg wpisany w czworokąt

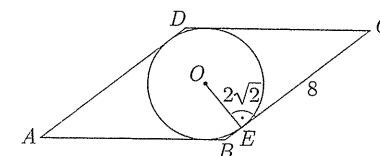
Zestaw I

1. a) Oblicz stosunek pola koła opisanego na kwadracie o boku długości a do pola koła wpisanego w ten kwadrat.
b) Na okręgu opisano kwadrat, a następnie wpisano w ten okrąg trójkąt równoboczny. Wyznacz stosunek pola kwadratu do pola trójkąta.

2. a) W romb o kącie ostrym 30° wpisano okrąg o promieniu 7. Oblicz pole tego rombu.

- b) Oblicz promień okręgu wpisanego w romb o przekątnych długości 6 i 18.

3. Promień okręgu wpisanego w romb $ABCD$ jest równy $2\sqrt{2}$. Odcinek CE ma długość 8 (rysunek obok). Oblicz pole rombu.



4. Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trapez równoramienny. Oblicz obwód tego trapezu, jeśli:

- a) jego ramię tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze 30° ,
b) przekątna trapezu ma długość 5 cm.

5. W trapez równoramienny o kącie rozwartym 135° wpisano okrąg. Oblicz jego promień, jeśli odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $7\sqrt{2}$.

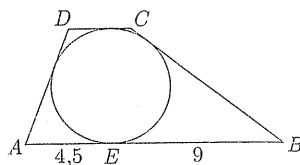
6. Na okręgu o środku O opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB . Wykaż, że kąt BOC jest prosty. Oblicz pole tego trapezu, jeśli promień okręgu wynosi 3 cm, a punkt styczności okręgu z ramieniem dzieli je w stosunku 4 : 9.

7. a) Oblicz pole trapezu prostokątnego opisanego na okręgu o promieniu 3, jeśli miara kąta ostrego trapezu wynosi 30° .

- b) W trapez prostokątny wpisano koło. Odległości jego środka od końców dłuższego ramienia trapezu wynoszą 6 i 2. Oblicz pole tego koła.

8. Oblicz promień okręgu wpisanego w trapez o obwodzie 56 cm i polu 70 cm².

9. W trapez $ABCD$, którego wysokość jest równa 6, wpisano okrąg (rysunek obok). Punkt styczności E okręgu z dłuższą podstawą trapezu podzielił ją na odcinki długości 4,5 i 9. Oblicz pole zamalowanej figury.



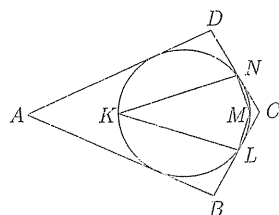
10. Stosunek długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu wynosi $1 : 3 : 4$, a obwód tego czworokąta jest równy 20 cm.
- Wyznacz długości boków czworokąta.
 - Oblicz pole czworokąta, jeśli promień okręgu jest równy 3 cm.

Test jednokrotnego wyboru

11. Stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb wynosi $\frac{8}{\pi}$. Wskaż miarę kąta ostrego tego rombu.
- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°
12. Deltoid o kątach: $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Wskaż obwód tego deltoidu.
- A. $4 + 8\sqrt{3}$ B. $6 + 6\sqrt{3}$ C. $8 + 4\sqrt{3}$ D. $4 + 6\sqrt{3}$
13. Trapez równoramienny o podstawach długości 4 cm i 16 cm jest opisany na okręgu. Jaka długość ma przekątna tego trapezu?
- A. 12 B. $2\sqrt{41}$ C. $4\sqrt{17}$ D. $3\sqrt{34}$

Zestaw II

14. Na okręgu opisano deltoid $ABCD$ o polu 221 cm^2 i obwodzie 68 cm. W ten sam okrąg wpisano deltoid $KLMN$ o obwodzie 30 cm jak na rysunku obok. Oblicz promień r okręgu i pole P deltoidu $KLMN$.
15. Na okręgu o promieniu r opisano trapez o kątach ostrych α i β przy podstawie. Wyznacz pole tego trapezu.
16. Na okręgu o promieniu r opisano trapez, którego dłuższa podstawa jest równa $4r$. Wyznacz pole P trapezu i promień R okręgu opisanego na tym trapezie.



17. W romb wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z bokiem rombu dzieli ten bok na odcinki długości 1 cm i 9 cm. Oblicz wysokość rombu i długości jego przekątnych.
18. Stosunek długości przekątnych rombu wynosi $1 : 2$. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten romb do pola rombu.
19. W trapez równoramienny o polu P wpisano okrąg o promieniu r . Wyznacz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.
20. W trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD wpisano okrąg o środku O i promieniu r . Punkty E i F należą odpowiednio do podstaw AB i CD i są punktami styczności tych podstaw z okręgiem. Wykaż, że $|EB| \cdot |FC| = r^2$.
21. Wyznacz pole trapezu o podstawach długości a i b , jeśli w trapez ten można wpisać okrąg i można na nim opisać okrąg.

*6.8. Twierdzenie sinusów

Jeżeli nie napisano inaczej, przyjmij, że boki trójkąta: a, b, c leżą naprzeciwko kątów odpowiednio: α, β, γ .

Zestaw I

- Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.
 - $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, c = 4$
 - $\alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ, c = 12$
 - $\beta = 100^\circ, \gamma = 60^\circ, a = 9$
 - $\alpha = 40^\circ, \gamma = 135^\circ, b = 10$
- W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8, \sphericalangle CAB = 55^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 86^\circ$. Oblicz obwód i pole trójkąta.
- Bok AC trójkąta ABC ma długość 10. Oblicz wysokość opuszczoną na ten bok, jeśli $\sphericalangle ACB = 130^\circ, \sphericalangle ABC = 30^\circ$.
- W trójkącie dane są kąty $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 45^\circ$ oraz suma długości boków leżących naprzeciwko tych kątów: $a + b = 8 + 4\sqrt{2}$. Rozwiąż ten trójkąt.

5. Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie, wiedząc, że miary pozostałych kątów są nie większe niż 90° .

- a) $a = 4, b = 8, \alpha = 30^\circ$ c) $b = 12, c = 10, \gamma = 45^\circ$
b) $a = 6, b = 7, \beta = 60^\circ$ d) $a = 6, c = 9, \gamma = 140^\circ$

6. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt spełniający podane warunki.

- a) $a = 8, b = 6, \beta = 60^\circ$ b) $a = 8, c = 5, \gamma = 100^\circ$

7. Uzasadnij, że istnieją dokładnie dwa trójkąty spełniające podane warunki. Rozwiąż te trójkąty.

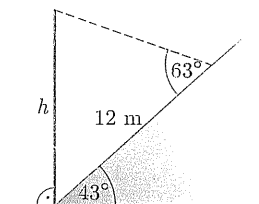
- a) $a = 4, b = 7, \alpha = 30^\circ$ b) $b = 6, c = 10, \beta = 35^\circ$

8. a) Rozwiąż trójkąt o kątach 25° i 35° wpisany w okrąg o obwodzie 10π .

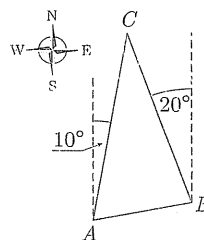
b) Wyznacz pole trójkąta o kątach 30° i 50° , wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R .

9. Na trapezie o podstawach długości 14 cm i 10 cm oraz wysokości 6 cm opisano okrąg. Oblicz jego promień, wiedząc, że środek okręgu leży wewnątrz trapezu.

10. Maszt o wysokości h rzuca cień długości 12 m na zbocze nachylone do poziomu pod kątem 43° jak na rysunku. Kąt padania promieni słonecznych na zbocze wynosi 63° . Oblicz wysokość masztu z dokładnością do 0,1 m.



11. Dwaj obserwatorzy znajdują się w punktach A i B oddalonych od siebie o 500 m (rysunek obok). Obserwator A zameldował, że punkt C jest odchylony o 10° , a punkt B – o 80° na wschód od kierunku północnego. Obserwator B stwierdził, że punkt C znajduje się o 20° na zachód od kierunku północnego. Oblicz, z dokładnością do 0,1 m, odległość każdego z obserwatorów od punktu C .



Test jednokrotnego wyboru

12. Sinus kąta przy podstawie trójkąta równoramiennego wynosi 0,6. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

- A. 25 cm, B. 28 cm, C. 30 cm, D. 32 cm.

13. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 6$, $|BC| = 3\sqrt{2}$ i $\sphericalangle BAC = 30^\circ$. Jaką miarę może mieć kąt ACB ?

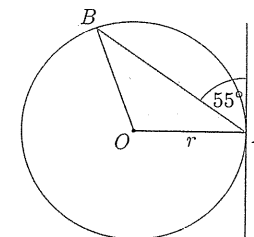
- A. 15° B. 18° C. 30° D. 36°

14. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle ABC = 75^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. Jeśli bok AB ma długość 2 cm, to bok AC ma długość:

- A. $(\sqrt{3} + 3)$ cm, B. $(\sqrt{3} + 2)$ cm, C. $(\sqrt{3} + 1)$ cm, D. $2\sqrt{3}$ cm.

Zestaw II

15. Cięciwa AB okręgu o środku O ma długość 10 cm. Przez punkt A poprowadzono styczną do okręgu jak na rysunku obok. Oblicz promień okręgu i pole trójkąta AOB , jeśli kąt między styczną a cięciwą jest równy 55° .

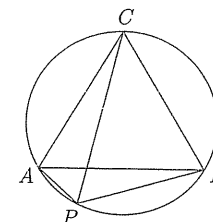


16. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu 2. Wyznacz długości boków i pole czworokąta, jeśli $\sphericalangle DAB = 135^\circ$, $\sphericalangle CDA = 75^\circ$, $\sphericalangle ABD = 30^\circ$.

17. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt D leży na boku BC . Wyznacz tangens kąta DAB , jeśli stosunek pola trójkąta ADB do pola trójkąta ADC wynosi 1 : 2.

18. Przez środek boku trójkąta równobocznego poprowadzono prostą nachyloną do tego boku pod kątem α , gdzie $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. W jakim stosunku ta prosta podzieliła pole trójkąta?

19. W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC . Punkt P należy do łuku $\widehat{AB}$ jak na rysunku obok. Wykaż, że $|AP| + |BP| = |CP|$.



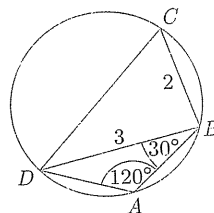
20. W trójkąt T o kątach: $\alpha, \beta, \pi - \alpha - \beta$ wpisano okrąg O o promieniu r . Wyznacz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności trójkąta T i okręgu O .

21. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b . Wykaż, że długość odcinka zawartego w dwusiecznej kąta prostego o końcu leżącym na przeciwprostokątnej wynosi $d = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

*6.9. Twierdzenie cosinusów

Zestaw I

- Oblicz długość boku c trójkąta, mając dane:
 - $a = 5, b = 8, \gamma = 60^\circ$,
 - $a = 5, b = 3\sqrt{2}, \gamma = 45^\circ$,
 - $a = 6, b = 9, \gamma = 120^\circ$,
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 4, \gamma = 150^\circ$.
- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 4, c = 2$
 - $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3} + 3$
 - $a = 5, b = 6, c = 8$
 - $a = 4, b = 2, c = 5$
- Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{6}, \alpha = 30^\circ$
 - $a = 6, b = \sqrt{2}, \gamma = 135^\circ$
- Długości dwóch boków trójkąta są równe 4 i 10, a jego pole wynosi 12. Oblicz cosinus kąta między tymi bokami i długość trzeciego boku.
- Miara jednego z kątów trójkąta wynosi 120° , a dwusieczna tego kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki długości 4 i 8. Oblicz długości boków trójkąta.
- Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:
 - długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6,
 - promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- W trójkącie ABC miara kąta BCA jest dwa razy większa od miary kąta CAB . Oblicz obwód tego trójkąta, wiedząc, że:
 - $|AC| = 6$ i $|BC| = 9$,
 - $|AC| = 5$ i $|BC| : |AB| = 2 : 3$.
- Przekątne równoległoboku mają długości 6 i 12, a jeden z jego boków jest równy krótszej przekątnej. Oblicz cosinus kąta ostrego α między przekątnymi i długość x drugiego boku równoległoboku.
- W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok dane są: $|BC| = 2, |BD| = 3, \sphericalangle DAB = 120^\circ$ i $\sphericalangle ABD = 30^\circ$. Na czworokącie tym opisano okrąg. Oblicz promień okręgu i długości pozostałych boków czworokąta.



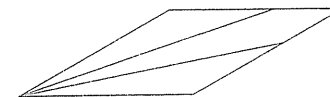
- W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AB| = 3, |BC| = 4, |CD| = 13, |AD| = 12$ i $|AC| = 5$. Oblicz cosinus kąta DAB i długość drugiej przekątnej.
- Podstawy trapezu mają długości 3 i 6, a jego ramiona są równe 4 i 5. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

Test jednokrotnego wyboru

- W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle BAC = 120^\circ, |AB| = \sqrt{2} - 1$ i $|AC| = \sqrt{2} + 1$. Wskaż długość boku BC tego trójkąta.
 - $\sqrt{5}$
 - $\sqrt{6}$
 - $\sqrt{7}$
 - $2\sqrt{2}$
- Dany jest trójkąt o bokach długości: 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. Wskaż sumę miar dwóch największych kątów tego trójkąta.
 - 135°
 - 150°
 - 155°
 - 165°
- Boki równoległoboku mają długości 4 i $2 + 2\sqrt{3}$, a miara jego kąta rozwartego jest równa 150° . Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość:
 - $2 + \sqrt{2}$,
 - $2 + \sqrt{3}$,
 - $2\sqrt{2}$,
 - $2\sqrt{3}$.

Zestaw II

- W rombie o kącie ostrym 30° i boku długości a poprowadzono z wierzchołka kąta ostrego dwa odcinki jak na rysunku obok, które podzieliły romb na trzy figury o równych polach. Wyznacz długości tych odcinków.
- Stosunek długości dwóch boków trójkąta wynosi $3 : 8$, a kąt między tymi bokami ma miarę 60° . Oblicz tangensy pozostałych kątów tego trójkąta.
- W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 2\sqrt{7}, |BC| = \sqrt{7}, \sphericalangle BCA = 120^\circ$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta BCA dzieli bok AB .
- W trójkącie równoramiennym poprowadzono środkowe łączące końce podstawy z ramionami. Oblicz:
 - tangens kąta ostrego między środkowymi, jeśli trójkąt jest prostokątny,
 - cosinus kąta między ramionami, jeśli środkowe są prostopadłe.



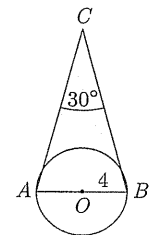
19. W trapez równoramienny wpisano okrąg o promieniu r . Punkty styczności dzielą ramiona trapezu w stosunku $2 : 3$. Wyznacz długość ramienia trapezu oraz cosinus kąta α między przekątną a ramieniem, zawierającego krótszą podstawę.
20. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 120° . Długości boków tego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz $\frac{|AB|}{|BC|}$ i $\frac{|AC|}{|BC|}$.
21. Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach A, B i C jest ostrokątny.

a) $A(-5, 4), B(0, 0), C(3, 4)$ b) $A(-3, -1), B(6, 3), C(0, 5)$

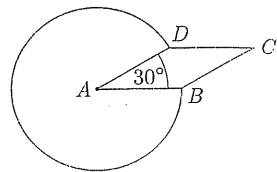
Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Punkt P jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Kąt ABC ma miarę 80° . Jaka miarę ma kąt APC ?
- Na czworokącie $ABCD$, którego kąt ABC ma miarę 135° , opisano okrąg o środku O . Oblicz miary pozostałych kątów czworokąta, wiedząc, że $\sphericalangle DOB = 140^\circ$.
- Miary kątów utworzonych przez przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg wynoszą 70° i 80° . Oblicz miary kątów czworokąta.
- Na trójkącie ABC , w którym $\sphericalangle ABC = 75^\circ$, a $\sphericalangle CAB = 40^\circ$, opisano okrąg. Styczna poprowadzona do okręgu w punkcie C przecina przedłużenie boku AB w punkcie P . Oblicz miary kątów trójkąta BPC .
- Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC jest średnicą koła o środku O i promieniu 4, jak na rysunku obok. Kąt ACB ma miarę 30° . Oblicz pole części trójkąta leżącej na zewnątrz koła.
- W trójkącie ABC o bokach długości $|AC| = 6$ i $|BC| = 3\sqrt{2}$ poprowadzono wysokość CD . Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz promień R okręgu opisanego na nim, jeśli trójkąt BCD jest równoramienny.
- Odległość środka okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym od prostej zawierającej podstawę tego trójkąta wynosi 7 cm. Oblicz pole trójkąta, wiedząc, że jego ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy.
- Dany jest trójkąt równoramienny, w którym stosunek długości ramienia do długości podstawy jest równy $2 : 3$. W trójkąt ten wpisano okrąg, a w okrąg wpisano prostokąt o stosunku boków również $2 : 3$. Oblicz stosunek pola trójkąta do pola prostokąta.
- Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego są równe 5 i 12. Z wierzchołka kąta prostego poprowadzono półprostą, która podzieliła trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Oblicz stosunek promieni okręgów wpisanych w powstałe trójkąty.
- Obwód rombu wynosi $2p$, a suma jego przekątnych jest równa d . Wykaż, że pole rombu wyraża się wzorem $P = \frac{1}{4}(d^2 - p^2)$.



11. Dane jest koło o środku A i romb $ABCD$, którego wierzchołki B i D należą do okręgu jak na rysunku obok. Kąt ostry rombu ma miarę 30° , a pole rombu jest równe $2\sqrt{2}$. Oblicz pole wycinka koła zaznaczonego na rysunku kolorem oraz wysokość rombu.

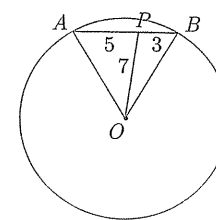


12. W trapezie równoramiennym $ABCD$ poprowadzono wysokość DE . Oblicz pole trapezu, jeśli $|BD| = 10$ cm i $|EB| = 8$ cm.
13. Długości podstaw trapezu równoramiennego wynoszą 10 cm i 14 cm.
- Oblicz długości odcinków, na jakie przekątne trapezu podzieliły odcinek łączący środki jego ramion.
 - Wyznacz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu, jeśli suma miar kątów przy dłuższej podstawie trapezu wynosi 90° .
14. Długości ramion trapezu wynoszą 5 cm i $2\sqrt{5}$ cm, a długości jego podstaw są równe 3 cm i 8 cm. Oblicz pole tego trapezu.
15. Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie S . Oblicz pole trapezu, jeśli pole trójkąta ABS jest równe 16, a pole trójkąta CDS wynosi 4.
16. a) Na okręgu o promieniu 3 cm opisano trapez prostokątny. Oblicz pole trapezu, jeśli jego najdłuższy bok ma długość 12 cm.
- b) Dłuższe ramię trapezu prostokątnego ma długość 10 cm, a punkt styczności z okręgiem wpisanym w ten trapez dzieli je w stosunku 1 : 4. Oblicz promień okręgu i pole trapezu.
17. Przekątna trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $4\sqrt{5}$ i jest prostopadła do ramienia trapezu. Wysokość CE dzieli podstawę AB na dwa odcinki takie, że $|AE| = 8$. Oblicz pole trapezu i promień okręgu opisanego na tym trapezie.

Zestaw II

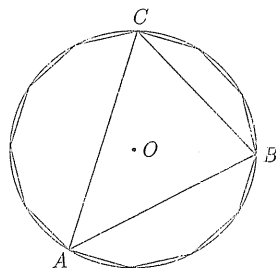
18. Na okręgu odmierzone luki: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CD}$ odpowiadające kolejno kątom środkowym: 100° , 60° i 80° . Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$ oraz miarę kąta między jego przekątnymi.
19. Najdłuższy bok trójkąta ma długość 8 cm, a dwa z jego kątów mają miary 10° i 20° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

20. W kole o środku O poprowadzono cięciwę AB . Punkt P dzieli tę cięciwę na odcinki o długościach 5 i 3, jak na rysunku obok. Odcinek OP ma długość 7. Oblicz promień koła i pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt AOB .



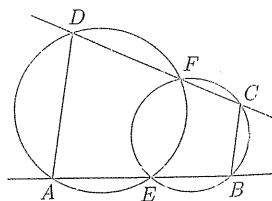
21. Trójkąt prostokątny wpisano w okrąg o promieniu 4,5. Odległość jednego z wierzchołków trójkąta od stycznej poprowadzonej w wierzchołku kąta prostego wynosi 4. Oblicz obwód trójkąta.
22. a) W trójkącie równoramiennym suma długości ramienia i wysokości opuszczonej na podstawę wynosi p . Kąt przy podstawie ma miarę 30° . Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
- b) Pole trójkąta równoramiennego wpisanego w okrąg o promieniu 2 cm jest równe $3\sqrt{3}$ cm². Oblicz wysokość trójkąta.
23. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 4 cm, a jego dłuższa podstawa – 6 cm. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trapez oraz promień R okręgu opisanego na nim.
24. Kąt rozwarty trapezu równoramiennego ma miarę 135° , a kąt między przekątną a dłuższą podstawą – 30° . Wyznacz długość przekątnej oraz długości boków trapezu, jeśli promień okręgu opisanego na nim wynosi R .
25. W romb o boku długości a i kącie ostrym 60° wpisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu oraz pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami rombu.
26. Miara kąta ostrego równoległoboku wynosi 60° . Odległości punktu przecięcia przekątnych równoległoboku od jego sąsiednich boków są równe 3 i 4. Oblicz pole równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
27. Na czworokącie $ABCD$, w którym $|AB| = \sqrt{3} - 1$, $|BC| = 2$, $|AC| = \sqrt{6}$, opisano okrąg. Wyznacz długości pozostałych boków czworokąta, wiedząc, że są one równe i oblicz promień okręgu.
28. Z punktu leżącego na okręgu poprowadzono dwie cięciwy o długościach 4 cm i 8 cm. Oblicz promień okręgu, jeśli odległość między środkami cięciw wynosi $2\sqrt{7}$ cm.

29. Na deltoidzie o polu równym 28 opisano okrąg o promieniu 4. Oblicz obwód deltoidu.
30. W trójkąt ABC wpisano okrąg o promieniu 1. Bok BC został podzielony przez punkt styczności D na odcinki długości $|BD| = 7$ i $|DC| = 3$. Oblicz sinus kąta ABC i długości boków AB i AC tego trójkąta.
31. W trójkącie prostokątnym dwusieczna jednego z kątów ostrych dzieli przeciwległy bok w stosunku $1 : 3$. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
32. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B są prostopadłe. Oblicz sinus kąta ACB .
33. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano punkt P taki, że $|BP| : |PC| = 1 : 2$. Oblicz cosinusy kątów CAP i PAB . Uzasadnij, że promienie okręgów opisanych na trójkątach CAP i PAB są równe.
34. W okrąg o promieniu 2 wpisano dwunastokąt foremny. Oblicz miary kątów oraz pole trójkąta ABC wyznaczonego przez przekątne dwunastokąta jak na rysunku obok.
35. Różnica pola koła opisanego na ośmiokącie foremnym i pola koła wpisanego w ten ośmiokąt wynosi 4π . Oblicz długość boku ośmiokąta.



Zestaw III

36. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Z punktu P należącego do przyprostokątnej AC poprowadzono odcinek PQ taki, że punkt Q należy do przeciwprostokątnej AB i $PQ \perp AB$. Uzasadnij, że $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PBQ$.
37. Dwa okręgi przecinają się w punktach E i F jak na rysunku obok. Przez punkt E poprowadzono prostą przecinającą te okręgi w punktach A i B , a przez punkt F – prostą przecinającą je w punktach C i D . Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.



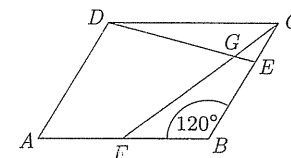
38. Punkty A, B, C i D leżące na okręgu dzielą go na cztery łuki: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ i $\widehat{DA}$. Oznaczmy środki tych łuków odpowiednio: A_1, B_1, C_1 i D_1 . Wykaż, że proste A_1C_1 i B_1D_1 są prostopadłe.
39. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC opuszczono wysokość CD . Wykaż, że suma promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC , ADC i DBC jest równa tej wysokości.
40. Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Miara największego kąta jest dwa razy większa od miary najmniejszego kąta tego trójkąta. Oblicz długości jego boków.
41. Długości boków trójkąta leżących naprzeciwko jego wierzchołków A, B i C są równe odpowiednio a, b i c . Wykaż, że długość zawartego w tym trójkącie odcinka dwusiecznej kąta CAB wyraża się wzorem:

$$d = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c}$$

42. Miary dwóch kątów trójkąta są równe α i β , gdzie $\beta > \alpha$. Uzasadnij, że tangens kąta γ zawartego między środkową a wysokością poprowadzonymi z wierzchołka trzeciego kąta wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

43. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = 6$, $|AD| = 5$ i $\sphericalangle ABC = 120^\circ$. Z wierzchołków C i D poprowadzono odcinki CF i DE , których końce podzieliły boki AB i BC w stosunku odpowiednio $1 : 1$ oraz $3 : 2$ jak na rysunku obok. Oblicz pole czworokąta $FBEG$, jeśli G jest punktem przecięcia odcinków CF i DE .



44. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 60° . Wyznacz stosunek długości boków tego równoległoboku, jeśli stosunek kwadratów długości jego przekątnych wynosi $\frac{7}{3}$.
45. Podstawa trapezu jest średnicą okręgu na nim opisanego. Oblicz cosinus kąta rozwartego trapezu, jeśli stosunek sumy długości jego ramion do sumy długości podstaw wynosi $1 : 2$.

46. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość $4\sqrt{2}$, a proste zawierające ramiona trapezu przecinają się pod kątem prostym. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie, wiedząc, że jest on równy długości krótszej podstawy.

47. W trójkącie równoramiennym ABC kąt C między ramionami trójkąta ma miarę 36° . Dwieścina kąta A przecina bok BC w punkcie D . Uzasadnij, że trójkąty ABC i ABD są podobne oraz wykaż, że $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

48. a) Wykaż, że długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku 2 jest równa $1 + \sqrt{5}$.

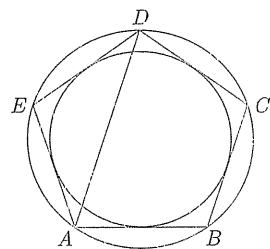
b) Wyznacz promień r okręgu wpisanego w pięciokąt foremny o boku a i promień R okręgu na nim opisanego.

49. Obwód trójkąta jest równy 2, a miary jego kątów wynoszą α , β i γ . Wyznacz długość boku leżącego naprzeciwko kąta α oraz pole trójkąta.

50. Wykaż, że pole trójkąta o kątach α , β , $\pi - \alpha - \beta$ wyraża się wzorem

$$P = r^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}},$$

gdzie r oznacza promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Odpowiedzi do zadań

1.1. Stopień i współczynniki wielomianu

1. a) $w(x) = -x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 1$,
 $\operatorname{st}(w) = 5$
 b) $w(x) = 7x^6 - 3x^5 - 3x^2 + 2x - 2$,
 $\operatorname{st}(w) = 6$
 c) $w(x) = \frac{3}{4}x^8 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{4}x^5 - x^2 + 7$,
 $\operatorname{st}(w) = 8$
 d) $w(x) = (1 - \sqrt{2})x^9 + \sqrt{2}x^3 - x$,
 $\operatorname{st}(w) = 9$

2. a) $\operatorname{st}(w) = 5$, $a_0 = 0$, $a_5 = -3$
 b) $\operatorname{st}(w) = 4$, $a_0 = \sqrt{3} - 1$, $a_4 = 0,8$

3. a) $w(x) = 3x^5 + 6x^3 + 6$
 b) $w(x) = 8x^5 + 4x^4 - 4x^2 - 8x - 12$

4. a) $w(-1) = -5$, $w(0) = 1$, $w(1) = 5$
 b) $w(-1) = 11$, $w(0) = -3$, $w(1) = -13$
 c) $w(-1) = -3$, $w(0) = -7$, $w(1) = -3$
 d) $w(-1) = -0,125$, $w(0) = 1,25$,
 $w(1) = 2,875$

5. a) A b) C

6. a) $a = 4\frac{5}{12}$, $b = -8\frac{1}{3}$, $c = 4\sqrt{6}$
 b) $a = -\frac{13}{24}$, $b = -3\frac{1}{6}$, $c = \sqrt{6} - 3$

7. a) $a = 1$ b) $a = -2$ c) $a = -\frac{1}{4}$

8. a) $a = -9$, $b = 5$
 b) $a = \frac{1}{3}$, $b = -3$
 c) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

9. A

10. D

11. C

12. a) $\operatorname{st}(w) = 3$ dla $a \neq -1$ i $a \neq 1$,
 $\operatorname{st}(w) = 1$ dla $a = 1$, $\operatorname{st}(w) = 0$ dla
 $a = -1$
 b) $\operatorname{st}(w) = 4$ dla $a \neq -3$ i $a \neq 0$,
 $\operatorname{st}(w) = 2$ dla $a = -3$, $\operatorname{st}(w) = 0$ dla
 $a = 0$
 c) $\operatorname{st}(w) = 6$ dla $a \neq 0$ i $a \neq 4$, $\operatorname{st}(w) = 3$
 dla $a = 4$, $\operatorname{st}(w) = 0$ dla $a = 0$

- d) $\operatorname{st}(w) = 5$ dla $a \neq -2$ i $a \neq 1$,
 $\operatorname{st}(w) = 4$ dla $a = -2$, $\operatorname{st}(w) = 2$ dla
 $a = 1$

13. a) $w(x) = 12x^3 + 10x^2 + 8x + 6$
 b) $w(x) = 27x^3 + 21x^2 + 15x + 9$ lub
 $w(x) = 33x^3 + 27x^2 + 21x + 15$

14. a) $w(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$,
 $w(-1) = a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n$
 b) -3

15. a) 6 b) -1

1.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

1. a) $f(x) + g(x) = 4x^3 - 4$,
 $f(x) - g(x) = 4x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 8$
 b) $f(x) + g(x) = 6x^5 - 6x^3 + 6x^2 + x$,
 $f(x) - g(x) = -2x^6 - 2x^5 + 8x^2 + x$
 c) $f(x) + g(x) = \frac{1}{2}x^6 + 5x^4 + 1$,
 $f(x) - g(x) = x^6 - x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 4$

2. a) $u(x) = 3x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 3x + 24$,
 $w(x) = -0,5x^5 - 3x^4 - 4,5x^3 - 0,5x + 10$,
 b) $u(x) = 2x^5 - 4x^4 - 6x^2 + 24x - 12$,
 $w(x) = 10,5x^5 - 8x^4 + x^2 + 9x - 3,5$

3. a) $w(x) = 3x^3 - 3x - 1$, $\operatorname{st}(w) = 3$
 b) $w(x) = -8,5x^2 + 8$, $\operatorname{st}(w) = 2$

4. a) $h(x) = 6x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6$
 b) $h(x) = 10x^5 + 15x^4 + 14x^3 + 12x^2 + 10$
 c) $h(x) = -8x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 8$
 d) $h(x) = 5x^4 + 6x^3 + \frac{4}{3}x^2$

5. a) $\operatorname{st}(u + w) = 4$ dla $a \in \mathbb{R}$
 b) $\operatorname{st}(u + w) = 3$ dla $a \neq -1$,
 $\operatorname{st}(u + w) = 2$ dla $a = -1$
 c) $\operatorname{st}(u + w) = 6$ dla $a \neq -1$ i $a \neq 1$,
 $\operatorname{st}(u + w) = 4$ dla $a = 1$, $\operatorname{st}(u + w) = 0$
 dla $a = -1$

6. a) $\text{st}(u-w) = 4$ dla $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$,
 $\text{st}(u-w) = 3$ dla $a = 0$ i $b \neq 0$,
 $\text{st}(u-w) = 2$ dla $a = 0$ i $b = 0$
 b) $\text{st}(u-w) = 5$ dla $a \neq -1$ i $b \in \mathbb{R}$,
 $\text{st}(u-w) = 4$ dla $a = -1$ i $b \neq \frac{1}{2}$,
 $\text{st}(u-w) = 1$ dla $a = -1$ i $b = \frac{1}{2}$
 c) $\text{st}(u-w) = 4$ dla $a \neq -b$,
 $\text{st}(u-w) = 3$ dla $a = -b$ i $a \neq 0$,
 $\text{st}(u-w) = 2$ dla $a = 0$ i $b = 0$

7. C

8. B

9. D

10. a) P

b) $a = 12, b = 1$

11. $a = 2\frac{2}{3}, b = -3\frac{2}{3}, c = \frac{2}{3}$

12. $a = 0, b = 2$

13. $a = -2$

14. $a = -3$

1.3. Mnożenie wielomianów

1. a) $w(x) = 6x^5 + 3x^4 - 15x^3 + 21x^2$,
 $\text{st}(w) = 5, a_5 = 6$
 b) $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 2x + 6$,
 $\text{st}(w) = 4, a_4 = 3$
 c) $w(x) = -x^6 + 10x^2 - 12$, $\text{st}(w) = 6$,
 $a_6 = -1$
 d) $w(x) = 3x^5 - x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6$,
 $\text{st}(w) = 5, a_5 = 3$
 e) $w(x) = 4x^6 + 4x^3 - x^2 + 1$, $\text{st}(w) = 6$,
 $a_6 = 4$
 f) $w(x) = 8\sqrt{2}x^6 - 8x^5 + \sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}$,
 $\text{st}(w) = 6, a_6 = 8\sqrt{2}$
 2. a) $w(x) = -x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 10x^2 +$
 $-11x + 3$, $\text{st}(w) = 5$
 b) $w(x) = x^6 - 6x^3 - x^2 + 2x + 9$,
 $\text{st}(w) = 6$
 c) $w(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$, $\text{st}(w) = 3$
 3. a) $f(x) = x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x$,
 $g(x) = -x^4 + 12x^3 - 23x^2 + 4$

b) $f(x) = -10x^7 + 5x^6 + 2x^5 - 11x^4 +$
 $-6x^3 + 5x^2 - 6$,
 $g(x) = -4x^6 + 4x^5 - 11x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 10$
 c) $f(x) = -8x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 9x^2 +$
 $-3x + 2$,
 $g(x) = -4x^6 + 8x^5 - 8x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 3$

4. a) $\text{st}(w) = 3, a_0 = 10, a_3 = 1$,
 b) $\text{st}(w) = 4, a_0 = 3, a_4 = -2$,
 c) $\text{st}(w) = 6, a_0 = -3, a_6 = -5$,
 d) $\text{st}(w) = 3, a_0 = -10, a_3 = -1$,
 e) $\text{st}(w) = 5, a_0 = -3, a_5 = -4$,
 f) $\text{st}(w) = 6, a_0 = 0, a_6 = -2$

5. a) $\text{st}(w) = 8$ b) $\text{st}(w) = 6$ c) $\text{st}(w) \leq 4$

6. D

7. A

8. a) $a \neq -1$ b) $a = 2$ c) $a = 1$

9. $a = 0$

10. a) $a = -4, a = 0$ b) $a = -1, a = \frac{1}{2}$

11. a) $m = 1, n = 4$

b) $m = 5, n = 4$

c) $m = 2, n = 1$

12. a) $a = -1, b = 2, c = 0$

b) $w(x) = x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 1$

13. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$,
 $g(x) = -\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{10}x + 3$

1.4. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

1. a) $w(x) = x(3x-1)(3x+1)$
 b) $w(x) = 2x^2(5x-2)(5x+2)$
 c) $w(x) = -3x^3(3x-2)(3x+2)$
 2. a) $w(x) = x^2(x-5)^2$
 b) $w(x) = x^2(3x+1)^2$
 c) $w(x) = 2x^3(x-1)(x+3)$
 d) $w(x) = x^3(x-4)(x+0,5)$
 e) $w(x) = x(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$
 f) $w(x) = x^3(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$
 g) $w(x) = (x^2+x+4)(x+7)(x-1)$
 h) $w(x) = (3x-1)^2(x+1)(x+2)$
 i) $w(x) = 0,04x^3(3x-2)(3x+2) \cdot$
 $\cdot (7x^2+x+1)$

j) $w(x) = (x+2)(x-1)(x^2-x+4)$

k) $w(x) = -4x^3(x+1)(2x-1)^2$

l) $w(x) = 4(x^2+5)(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$

3. a) $w(x) = (3x-1)(x+1)^2$

b) $w(x) = (2x-5)(3x^2-x+9)$

c) $w(x) = x(4x-1)(x-2)$

d) $w(x) = (3-2x)(2x-1)(2x+1)$

4. a) $x^3+6x^2+12x+8$

b) $x^3+9x^2+27x+27$

c) x^3-3x^2+3x-1

d) $8x^3+12x^2+6x+1$

e) $2\sqrt{2}x^3+6x^2+3\sqrt{2}x+1$

f) $-27x^3+27x^2-9x+1$

5. a) x^3+8

b) x^3+27

c) $1-x^3$

d) $8x^3-1$

e) x^6+1

f) $27-x^6$

6. a) $(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

b) $(2x-1)(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4)$

c) $(\frac{x}{2}-1)(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})$

7. a) x^6-1

b) $125x^6-1$

c) $\sqrt{3}-27\sqrt{3}x^{12}$

d) x^8-2x^4+1

8. D

9. D

10. C

11. a) $w(x) = x^4(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)$

b) $w(x) = (2x-1)(2x+1)(3x+1) \cdot$
 $\cdot (4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)(9x^2-3x+1)$

12. $a = -1, b = 3, w(x) = x^2(2x+5)(x-2)$

13. a) $a = 1, b = 1$

b) $f(x) = x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$,

$g(x) = x^2(x-1)(x+2)$

1.5. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

1. a) $w(x) = (\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1)(5x^2+1)$

b) $w(x) = (5x+\sqrt{5})(5x^2-\sqrt{5}x+1)$

c) $w(x) = (x^2-x+1)(x^2+x+1)(x-1) \cdot$
 $\cdot (x+1)$

d) $w(x) = (\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1) \cdot$
 $\cdot (3x^2+\sqrt{3}x+1)(3x^2-\sqrt{3}x+1)$

2. a) $w(x) = x^2(x^2+1)^2$

b) $w(x) = 2x(x+1)(x-1)(x^2+3)$

c) $w(x) = \frac{1}{5}x^3(\sqrt{5}x+1)^2(\sqrt{5}x-1)^2$

d) $w(x) = x^2(x+0,5)(x-0,5)(x^2+4)$

3. a) $w(x) = x^2(\sqrt{5}x+1)(5x^2-\sqrt{5}x+1)$

b) $w(x) = x^3(x-0,5)(x^2+0,5x+0,25)$

c) $w(x) = (x+2)(x-1)(x^2+x+1) \cdot$
 $\cdot (x^2-2x+4)$

d) $w(x) = (2x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (x^2+\sqrt{2}x+2)(2x^2-\sqrt{2}x+1)$

4. a) $w(x) = (x+1)(x-1)^2$

b) $w(x) = (x^2+1)(x+1)^2(x-1)$

c) $w(x) = (x+1)(x-1)(2x-5)$

d) $w(x) = (x^2+1)(4x-3)$

e) $w(x) = (3x^2+2)(2x-3)$

f) $w(x) = (3x+1)(3x-1)^2$

g) $w(x) = (x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (2x+3)(2x-3)$

h) $w(x) = (2x^2-\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x+1) \cdot$
 $\cdot (2x-5)$

5. a) $w(x) = (2x-1)(x-1)(x-2)$

b) $w(x) = (x+1)(x-2)(2x-1)$

c) $w(x) = (3x+1)(9x^2-5x+1)$

d) $w(x) = (x+2)(5x-4)(x-5)$

e) $w(x) = (x+1)(3x-1)(x-1)(x-3)$

f) $w(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (x+1)(x+2)$

g) $w(x) = (2x^2+1)(x+1)(2x-1)$

h) $w(x) = x(5x^2-3x+10)(x+\sqrt{2}) \cdot$
 $\cdot (x-\sqrt{2})$

6. a) $w(x) = 4(x-1)(2x-3), w(\frac{7}{2}) = 40$

b) $w(x) = (5-x)(2x+1), w(6) = -13$

- c) $w(x) = 4(x+3)(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)$,
 $w(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 6 - \sqrt{3}$
d) $w(x) = (x-2)^2(x+1)(x+3)$,
 $w(\sqrt{2}-1) = 10\sqrt{2}-2$
e) $w(x) = 3x(3x-2)(3x+1)^2$,
 $w(\frac{\sqrt{3}+1}{3}) = 8\sqrt{3}+14$
7. D
8. B
9. C
10. a) $w(x) = (x^2 + \sqrt{3}x + 3)(\sqrt{5}x + 1) \cdot (\sqrt{5}x - 1)(x - \sqrt{3})$
b) $w(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)$
c) $w(x) = (x+2)(x+1)^2(x-1)^2$
d) $w(x) = (x+1)(x-1)^2(x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$
e) $w(x) = 2x^2(x+3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
f) $w(x) = x(x+1)^2(x-1)^2(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
13. a) $w(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2)$
b) $w(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3)$
c) $w(x) = x(2x^2 - \sqrt{3}x + 1) \cdot (2x^2 + \sqrt{3}x + 1)$

1.6. Równania wielomianowe

1. a) $x = 0, x = 2$
b) $x = -3, x = 0, x = \frac{1}{2}$
c) $x = -1, x = 0, x = 7$
d) $x = -2, x = 0, x = \frac{1}{8}$
e) $x = 0, x = 2 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{2}$
f) $x = 0, x = \sqrt{5} - 2, x = \sqrt{5} + 2$
2. a) $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$
b) $x = -\frac{1}{4}, x = 0$
c) $x = -\sqrt{6}, x = 0, x = \sqrt{6}$
3. a) $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$
b) $x = -\sqrt{7}, x = 0, x = \sqrt{7}$
4. wielomian $u: x = -2, x = 2, \text{II}$,
wielomian $v: x = -2, x = 0, x = 4, \text{III}$,
wielomian $w: x = -3, x = 0, x = 1, \text{I}$
5. a) $x = 5$

- b) $x = -\sqrt{2}, x = \frac{1}{5}, x = \sqrt{2}$
c) $x = 1, x = 2$
d) $x = \frac{1}{3}$
e) $x = -\sqrt{3}, x = 2$
f) $x = -\sqrt{3}, x = -\frac{1}{2}, x = \sqrt{3}$
g) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, x = -\frac{1}{5}, x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
h) $x = -2, x = 2$
6. a) $x = 2$
b) $x = -\sqrt{3}, x = -\sqrt{2}, x = 1, x = \sqrt{2}, x = \sqrt{3}$
c) $x = -3, x = -1, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 1$
d) $x = -1, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 1$
7. a) $(-\frac{1-\sqrt{17}}{2}, 0), (0, 0), (\frac{\sqrt{17}-1}{2}, 0)$
b) $(-2, 4), (-1, 4), (2, 4)$
8. C
9. B
10. D
11. C
12. $(-1, 5), (1, -1), (4, -10)$
13. a) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 5 - \sqrt{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 5 + \sqrt{2})$
b) $(-\sqrt{5}, 5\sqrt{5} + 2), (-1, 7), (0, 2), (1, -3), (\sqrt{5}, 2 - 5\sqrt{5})$
c) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}-7}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}-7}{2}), (4, 8\frac{1}{2})$
d) $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+3\sqrt{5}}{4}), (0, 3), (1, \frac{3}{2}), (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-3\sqrt{5}}{4})$
14. $a = -1, b = 8, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$
15. $m = 3, n = -2, x = -\frac{1}{2}$
16. a) $(-\sqrt{2}, -4), (\sqrt{2}, -4)$
b) $(-1, -8), (1, 0), (3, 0)$
c) $(-\sqrt{5}, \sqrt{5} - 5), (-1, 0), (\sqrt{5}, -5 - \sqrt{5})$
17. a) $a = \frac{2}{3}$
b) $a = -1, a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, a = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = 1$

1.7. Dzielenie wielomianów

1. a), c), d) niepodzielny
b), e) podzielny

2. a) $w(x) = (x^2 + x - 2)(x - 5) - 5$
b) $w(x) = (-x^2 + 2x - 2)(x + 2)$
c) $w(x) = (2x^2 + 3)(x - 4) + 12$
d) $w(x) = (5x^3 - 5x^2 + 5x - 4)(x + 1) + 4$
e) $w(x) = (4x^2 + 6)(x - \frac{1}{2}) - 2$
3. a) $w(x) = (x^2 - x - 1)(2x - 1)$
b) $w(x) = (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)(4x + 3) + 3$
c) $w(x) = (x^2 + 2x + 1)(3x - 2)$
d) $w(x) = (2x^3 - 4x^2 + 6)(\frac{1}{2}x + 1) - 1$
4. a) $w(x) = (2x^2 + 3x - 2)(x - 1) - 1$,
 $w(1) = -1$
b) $w(x) = (-5x^2 + 6x - 2)(x + 2)$,
 $w(-2) = 0$
c) $w(x) = (4x^2 + 4x + 1)(x - 0,5) - 4,5$,
 $w(0,5) = -4,5$
5. a) $a = -8$
6. B
7. C
8. C
9. a) $w(x) = (x - 4)(x^2 + 1) + x + 5$
b) $w(x) = (-x^2 + 4x + 2)(x^2 - x + 1) - 1$
c) $w(x) = (2x + 1)(2x^2 - x) - 5x$
d) $w(x) = (2x^2 - 1)(3x^2 + 1) + 5x - 2$
e) $w(x) = (2x^2 - 2x + 3)(2x^2 + x - 2) + -8x + 6$
10. a) $r(x) = 2, \text{st}(r) = 0$
b) $r(x) = -3x + 5, \text{st}(r) = 1$
c) $r(x) = 0$, stopień nie jest określony
d) $r(x) = 4x^2 + 4x - 3, \text{st}(r) = 2$
11. a) $a = -2, b = -6$
b) $a = 10, b = \frac{3}{2}$
c) $a = 6, b = 25$
12. a) $m = -20, n = -5$
b) $m = 8, n = 4$
c) $m = -3, n = 0$
- b) $a = 1, b = 5$
c) $a = 4, b = 2$
3. a) $a = -4, b = 0$
b) $a = 2, b = -1$
c) $a = 2, b = 1$
4. $a = -2$
5. a) $a = 1, b = 3$
b) $a = -1, b = 4$
c) $a = 4, b = -3$
d) $a = 1, b = -2$
6. a) $a = -4, b = 2$
b) $a = -4, b = 3$
c) $a = -3, b = 3$
d) $a = -1, b = 0$
7. a) $a = 0, b = -4, c = 2$
b) $a = 0, b = -2, c = -1$
c) $a = 1, b = -3, c = 5$
8. D
9. B
10. a) $a = 0, b = 1$
b) $a = 2, b = 1$
c) $a = -4, b = 3$
d) $a = -2, b = 1$ lub $a = -1, b = 2$
11. a) $a = 2\frac{2}{3}, b = -2$ lub $a = 4, b = 2$
b) $a = -1, b = -1$ lub $a = 2, b = 5$
12. a) $a = 4, b = -4, c = 7$
b) $a = 3, b = 2, c = 0$
c) $a = 3, b = -1, c = 1$
13. a) $a = 0, b = -2, c = 2$ lub $a = 2, b = 0, c = 2$
b) $x = 0, x = 2 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{2}$

1.9. Twierdzenie Bézouta

1. a), b), d), e) podzielny
c) niepodzielny
2. a) 3 b) -2 c) $-1\frac{3}{4}$ d) $4\frac{2}{3}$ e) 3
3. a) $x = -3, x = 2$,
 $w(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$
b) $x = 1, w(x) = (x-1)^2(x-7)$
c) $x = 3, w(x) = (x-2)(x-3)(x^2 + 1)$

1.8. Równość wielomianów

1. $f = k$
2. a) $a = 1, b = -1$

- d) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 2$,
 $w(x) = (x+5)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)$
e) $x = -1, x = 1$,
 $w(x) = (x+1)^2(2x+1)(x-1)$
4. a) $m = -1$
b) $m = -3, m = 1$
c) $m = -8, m = -1$
d) $m = -\frac{1}{2}, m = 0, m = \frac{1}{2}$
5. a), c) podzielny b), d) niepodzielny
6. D
7. A
8. C
9. B
10. a) $x+5$ b) $3x+8\frac{1}{2}$ c) $6x^2+4x-8$
11. a) $2x+11$
b) $-x+3$
c) $2x-6$
d) $-\frac{2}{3}x^2+x+\frac{2}{3}$
12. a) $a=4, b=-\frac{1}{2}$
b) $a=2, b=-13$
c) $a=14, b=8$
13. $a=-3, b=-5, c=4$,
 $w(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$,
pierwiastki: $-2, -1, 1, 2, 3$
14. a) $p=-6, q=24$, pierwiastki: $-2, 2, 6$
lub $p=6, q=-24$, pierwiastki: $-6, -2, 2$
b) $p=14, q=8$, pierwiastki: $-4, -2, -1$
15. a) $p=5, q=-6$
b) $p=5, q=-16, r=-20$
16. $B\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right), C\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 0\right), D\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}, 0\right)$,
 $E\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}, 0\right)$

1.10. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu

1. a) $x = -2, x = 1, x = 2$ b) $x = 1$
2. a) $x = 1$
b) $x = -2 - \sqrt{2}, x = -1, x = \sqrt{2} - 2$

- c) $x = 1, x = 2, x = 3$
d) $x = -3, x = \frac{1}{2}$
e) $x = -5$
f) $x = -3, x = -1\frac{1}{3}, x = 1$
g) $x = -1, x = \frac{2}{3}, x = 2$
h) $x = -2, x = \frac{4}{5}, x = 5$
3. a) $x = 1, w(x) = (x-1)^2(x^2+1)$
b) $x = -2, x = 1$,
 $w(x) = (x-1)(x+2)(2x^2-5x+4)$
c) $x = -5, x = 3$,
 $w(x) = (x-3)(x+5)(x^2+x+1)$
d) $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x = 1, x = 2$,
 $w(x) = \left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot$
 $\cdot (x-1)(x-2)$
4. a) $x = -3, x = -1, x = 1$
b) $x = -1, x = 2$
c) $x = -\frac{1}{2}, x = 2$
d) $x = -3, x = 1$
e) $x = -2, x = -1, x = 1, x = 3$
f) $x = -2, x = 1$
5. a) $x = -\frac{1}{2}, x = 2 - \sqrt{3}, x = 2 + \sqrt{3}$
b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = -3 - 2\sqrt{2}, x = -3 + 2\sqrt{2}, x = \frac{1}{3}$
d) $x = -\frac{1}{2}$
e) $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}, x = 0, x = \frac{1}{3}, x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
f) $x = 0, x = \frac{1}{5}$
6. C
7. B
8. D
9. a) $x = -2, x = 1, x = 7$
b) $x = -2, x = 1 - \sqrt{3}, x = 1 + \sqrt{3}$
c) $x = -2, x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}, x = 1$
d) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, x = 1, x = 2, x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
10. $a = -1$
11. a) $w(x) = x^3 + 6x^2 + 11x$ b) $x = 2$
12. a) $w(x) = x^3 + 15x^2 + 71x + 105$
b) $x = 2$
13. Wskazówka. Zauważ, że liczby d oraz $a+b+c+d$ są nieparzyste i rozwiąż wartości wielomianu w dla $x = 2k+1$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.
14. a) $P(t) = t^4 - 1,5t^3 - 1,5t^2 + 3t$
b) $t = 1, t = 2, P(1) = 1, P(2) = 4$

1.11. Pierwiastki wielokrotne

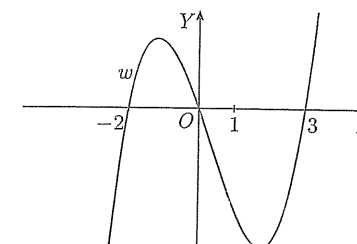
1. a) tak b) nie, trzykrotnym
2. a) nie b) tak, $x = 1$
3. a) $x = 0$ - jednokrotny,
 $x = 1$ - dwukrotny
b) $x = 0, x = 2$ - dwukrotne
c) $x = -3, x = 1$ - jednokrotne,
 $x = 0$ - trzykrotny
d) $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$ - dwukrotne
e) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - jednokrotne,
 $x = 0$ - dwukrotny
f) $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ - jednokrotne
4. a) $w(x) = (x-1)^2(3x-1)^2$,
 $x = 1, x = \frac{1}{3}$ - dwukrotne
b) $w(x) = x^2(x+1)^2(x^2-x+1)$,
 $x = -1, x = 0$ - dwukrotne
c) $w(x) = 3x^3(2x+1)^2(2x-1)(4x^2+1)$,
 $x = -\frac{1}{2}$ - dwukrotny
d) $w(x) = -x(x+5)(x+1)(x-5)^2$,
 $x = 5$ - dwukrotny
e) $w(x) = x^3(x-1)^3(x+1)^2(x+3)$,
 $x = -1$ - dwukrotny
f) $w(x) = x^2(x+1)^3(3x-2)(x-2)^2$,
 $x = 0, x = 2$ - dwukrotne
5. a) $x = -4$
b) $x = -\frac{\sqrt{2}+3}{2}, x = \frac{\sqrt{2}-3}{2}$
c) $x = -\sqrt{2}, x = \frac{1}{5}, x = \sqrt{2}$
7. D
8. C
9. B
10. a) $x = -2$ - dwukrotny,
 $x = 1$ - jednokrotny
b) $x = 1$ - jednokrotny,
 $x = 3$ - dwukrotny
c) $x = -2, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - jednokrotne, $x = 2$ - dwukrotny
d) $x = -1, x = 1$ - trzykrotne
e) $x = -2, x = 0$ - jednokrotne,
 $x = 1$ - trzykrotny

f) $x = -1 - \sqrt{3}, x = -2, x = \sqrt{3} - 1$,
 $x = 2$ - jednokrotne

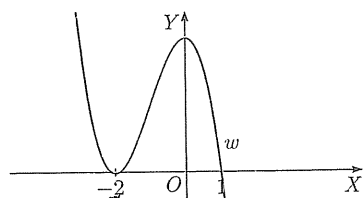
11. a) $a = 6$ b) $a = 0, a = 1$ c) $a = 2$
d) $a = -2$
12. a) $a = 3, b = 9$
b) $a = 2, b = -8$
c) $a = -2, b = 0$
13. a) $p = 7, q = -3, x_1 = 3, x_2 = 1$
b) $p = -2, q = -4, x_1 = -2, x_2 = 2$
14. a) tak b) nie c) nie
15. a) $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{15}{2}, c = \frac{3}{4}$
b) $x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
17. dla $k = -16: x = -2$, dla $k = 16: x = 2$

1.12. Wykres wielomianu

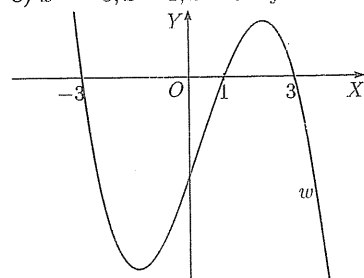
1. a) $a_3 > 0$, brak pierwiastków o krotności parzystej
b) $a_3 < 0, x = 1$
c) $a_4 > 0, x = -3$
2. a) $w(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)$
b) $w(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)$
c) $w(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2(x-2)$
3. a) $w(x) = \frac{1}{2}x^2(x+2)(x-3)$
b) $w(x) = \frac{1}{2}x(x+3)^2(x-2)$
c) $w(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-3)^2$
4. a) $x = -2, x = 0, x = 3$ - jednokrotne



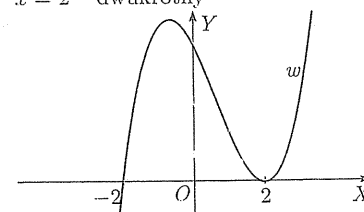
b) $x = -2$ - dwukrotny,
 $x = 1$ - jednokrotny



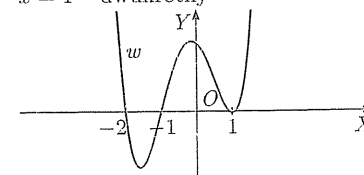
c) $x = -3, x = 1, x = 3$ - jednokrotne



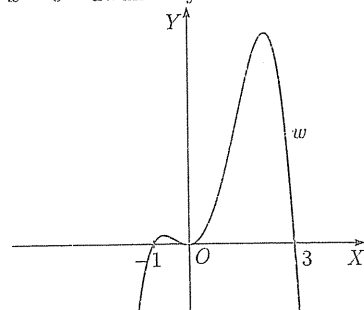
d) $x = -2$ - jednokrotny,
 $x = 2$ - dwukrotny



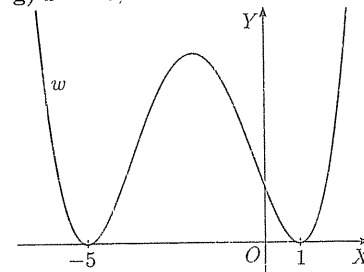
e) $x = -2, x = -1$ - jednokrotne,
 $x = 1$ - dwukrotny



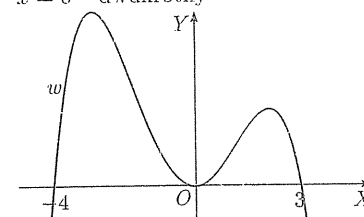
f) $x = -1, x = 3$ - jednokrotne,
 $x = 0$ - dwukrotny



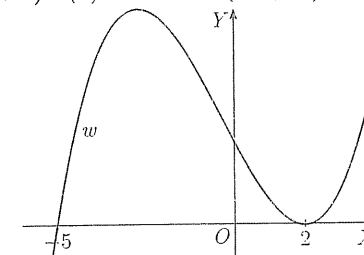
g) $x = -5, x = 1$ - dwukrotne



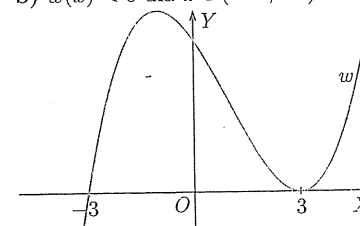
h) $x = -4, x = 3$ - jednokrotne,
 $x = 0$ - dwukrotny



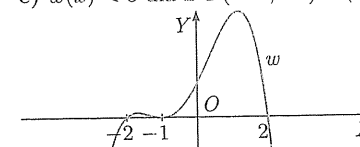
5. a) $w(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -5)$



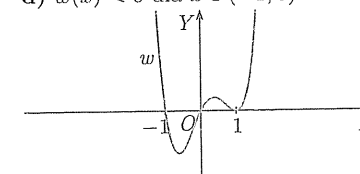
b) $w(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -3)$



c) $w(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$



d) $w(x) < 0$ dla $x \in (-1; 0)$



6. a) $w(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$

b) $w(x) = -2(x+1)(x-1)^2$

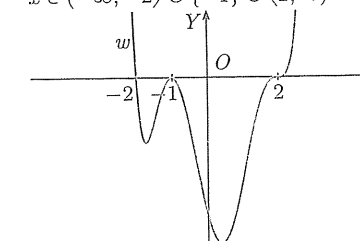
c) $w(x) = -(x+2)(x+1)(x-2)$

7. C

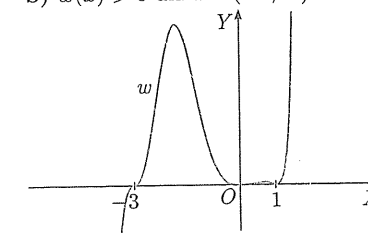
8. C

9. B

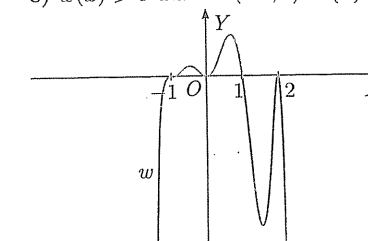
10. a) $w(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1\} \cup (2; \infty)$



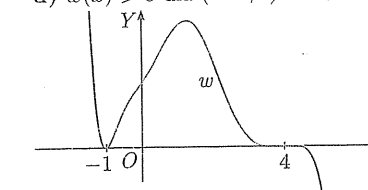
b) $w(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -3; \infty$



c) $w(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \{2\}$



d) $w(x) \geq 0$ dla $(-\infty; 4)$



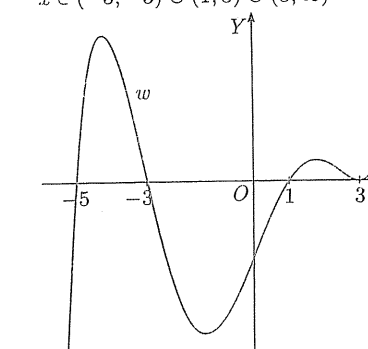
11. a) $w(x) = -2x^2(x+2)(x+1)(x-1)$

b) $w(x) = 2(x+1)^2(x-1)^2(x-2)$

c) $w(x) = -2x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

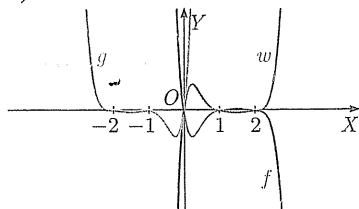
12. a) $w(x) = \frac{1}{5}(x+5)(x+3)(x-1)(x-3)^2$

b) $w(x) > 0$ dla
 $x \in (-5; -3) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$

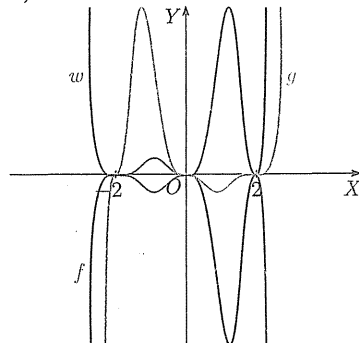


13. a) $w(x) = x(x+3)(x+1)$
 b) $f(x) = -x(x+3)(x+1)$ - wykres zielony, $g(x) = -x(x-3)(x-1)$ - wykres niebieski

14. a)



b)



15. a) $w(x) = 2x(x-2)^2$
 b) $f(x) = 2|x|(x-2)^2$ - wykres zielony,
 $g(x) = 2|x|(|x|-2)^2$ - wykres niebieski

1.13. Nierówności wielomianowe

- a) $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
 b) $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \{3\}$
 c) $x \in (-\infty; 1) \cup \langle 2; \infty \rangle$
- a) $x \in (-1; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$
 b) $x \in \langle -3; 5 \rangle$
 c) $x \in \{-4\} \cup \langle -3; 2 \rangle$
 d) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup \langle 3; 6 \rangle \cup \langle 6; \infty \rangle$
- a) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 0; 5 \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -3) \cup \{0\} \cup \langle 3; \infty \rangle$
 c) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \langle 0; \sqrt{2} \rangle$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

4. a) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 5; \infty \rangle$ b) $x \in \mathbb{R}$

- c) $x \in (-1; 1) \cup \langle 1; \infty \rangle$
 d) $x \in \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
 e) $x \in \langle -2; 2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
 f) $x \in \langle -1; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \rangle \cup \langle 1; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \rangle$
5. a) $x \in \langle 0; 1 \rangle$ b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 c) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 1; 2 \rangle$
6. a) $A \cap B = \langle -3; 0 \rangle \cup \langle 0; 3 \rangle$,
 $A \setminus B = (-\infty; -3)$
 b) $A \cap B = (-\infty; -2)$,
 $A \setminus B = \{-2\} \cup \langle 0; 2 \rangle$
7. a) $D = \mathbb{R}$
 b) $D = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$
 c) $D = (-\infty; -1) \cup \{0\}$
 d) $D = \langle -1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle \cup (-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0) \cup \langle 5; \infty \rangle$
8. a) $x = -3, x = -1, x = 2, w(x) \leq 0$ dla
 $x \in (-\infty; -3) \cup \langle -1; 2 \rangle$
 b) $x = 2, x = 3$,
 $w(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; 3)$
 c) $x = -1, x = 2$,
 $w(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$
 d) $x = \frac{1}{2}, w(x) \leq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
9. D
10. B
11. B
12. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)(2x-1)^2$
 a) $x \in (-\infty; -3) \cup \{\frac{1}{2}\}$
 b) $x \in \langle -3; -\frac{1}{4} \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$
13. $a = -8, b = 2, c = 12$,
 $x \in \langle -1; \frac{5-\sqrt{3}}{2} \rangle \cup \langle \frac{5+\sqrt{3}}{2}; \infty \rangle$
14. $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (\sqrt{2}; \infty)$
15. a) $x \in (-4; -2) \cup (-2; 1) \cup \langle 2; \infty \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (-2; 0)$
 c) $x \in \{-4, -2\} \cup \langle 0; \infty \rangle$
16. a) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$
 b) $x \in \langle 0; 2 \rangle$
17. a) $x \in \langle -2-\sqrt{3}; -3 \rangle \cup \langle -2; \sqrt{3}-2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$
 b) $x \in (-2; -1) \cup \langle 0; 2 \rangle$

1.14. Wielomiany - zastosowania

- $P(t) = 2(t-2)^3, t > 2$
 a) $t = 5$ b) $t > 4$
- $(3, 0), (3, 6), (-1, 0), (-1, 6)$
- a) $V(x) = x^2(x-2), x > 2$ b) $x > 4$
- a) $2 \times 2 \times 4$ lub
 $1 + \sqrt{5} \times 1 + \sqrt{5} \times 6 - 2\sqrt{5}$
 b) $S(x) = 32$ dla każdego $x \in (0; 4)$
- A
- B
- $110\frac{1}{8}\pi \text{ cm}^2 \approx 346 \text{ cm}^2$
- a) $V_1(x) = 4(4-x)^2(x+1), x \in (0; 4)$
 $V_2(x) = 4x(4-x)(5-x), x \in (0; 4)$
 b) $x \in (2; 4)$

Zestawy powtórzeniowe

- a) $w(x) = (a-1)x^3 - a^2x^2 + x, a \neq 1$
 b) $w(x) = (a-2a^2)x^4 - ax^3 + 2ax^2 + x + 1$,
 $a = \frac{1}{2}$
- a) $w(x) = x^3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$,
 $x = -\sqrt{5}, x = 0, x = \sqrt{5}$
 b) $w(x) = 0,01x(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})$,
 $x = -\sqrt{10}, x = 0, x = \sqrt{10}$
 c) $w(x) = x(x-3)^2, x = 0, x = 3$
 d) $w(x) = x^2(x+5)(x-1), x = -5$,
 $x = 0, x = 1$
 e) $w(x) = x(x+6)(x+5)(x-1)$,
 $x = -6, x = -5, x = 0, x = 1$
 f) $w(x) = -8x^2(2x-1)(2x+1), x = -\frac{1}{2}$,
 $x = 0, x = \frac{1}{2}$
 g) $w(x) = x(x^2+2)^2, x = 0$
 h) $w(x) = x^2(\sqrt{5}x-1)^2(\sqrt{5}x+1)^2$,
 $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, x = 0, x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- a) $w(x) = x(\sqrt{2}x-1) \cdot$
 $(2x^2 + \sqrt{2}x + 1), x = 0, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $w(x) = x^2(3x+2)(9x^2-6x+4)$,
 $x = -\frac{2}{3}, x = 0$
 c) $w(x) = x^2(2x-1)(4x^2+2x+1) \cdot$
 $(2x+1)(4x^2-2x+1), x = -\frac{1}{2}, x = 0$,
 $x = \frac{1}{2}$
- d) $w(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x+2)(x^2+2x+4) \cdot$
 $(x^2-2x+4), x = -2, x = 0, x = 2$
- a) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 b) $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$
 c) $x = 0, x = 2$
 d) $x = -1, x = 0, x = 6$
 e) $x = 0, x = 4 - \sqrt{10}, x = 4 + \sqrt{10}$
 f) $x = 0, x = 1, x = 4$
- a) $x = -1, x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, x = 0, x = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $x = 1, w(x) = x(x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1) \cdot$
 $(\sqrt{5}x+1)$
 b) $x = -3, x = 0, x = 3$,
 $w(x) = x^2(x-3)(x+3)(x^2+1)$
- a) $x = -3, x = -1, x = 3$
 b) $x = -\sqrt{2}, x = \frac{1}{5}, x = \sqrt{2}$
 c) $x = 1, x = 2$
 d) $x = -2, x = -\frac{1}{2}$
 e) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 f) $x = -2\sqrt{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2\sqrt{2}$
- a) $\{-2, 2, 3\}$
- a) $w(x) = (x-7)(x^2+2), x = 7$
 b) $w(4-\sqrt{6}) = -24$
- a) $a = 4, b = 3$
 b) $x = -\sqrt{3}, x = 1, x = \sqrt{3}$
 c) $x = -1, x = 0, x = 2$
- a) $w(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2+1)$, tak
 b) $w(x) = (x+1)^3(x^2-x+1)$, nie
- a) $x \in (-1; 1)$ b) $x \in (-4; 1) \cup \langle 1; \infty \rangle$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$
 d) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$
 e) $x \in (-\infty; -9) \cup (-3; 0) \cup \langle 0; 3 \rangle \cup \langle 9; \infty \rangle$
 f) $x \in \{0\} \cup \langle 1; \infty \rangle$
- a) $x+1$ b) $x - \sqrt{2}, x + \sqrt{3}$
- a) $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
 b) $x = -1 - \sqrt{2}, x = \sqrt{2} - 1$
 c) $x = 2$ d) $x = -1$
- a) $x = 1$ b) $x = -1, x = 2$ c) $x = 2$
 d) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, x = 5$
- a) $a = -9, b = 0$
 b) $x \in \langle -\sqrt{3}; \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}; \infty \rangle$

16. a) $p(x) = x^2$, $r(x) = 1$
 b) $p(x) = 2x^2 - x + 4$, $r(x) = -9$
 c) $p(x) = 2x^3 - 2x^2$, $r(x) = 5$
17. a) $w(x) = (x-3)(x^2 + 2x + 3) + 5$
 b) $w(x) = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 3x + 27) + 80$
18. a) 12 b) 7 c) -2
19. $a = -1$, $b = -12$
21. a) $k \in \{-9, -2, 0, 1\}$
 b) $k \in \{-4\frac{1}{2}, -4, -2\frac{1}{2}, 0\}$
22. a) $x = 2 - \sqrt{7}$, $x = 2$, $x = 2 + \sqrt{7}$
 b) $x = -3$, $x = 1$
 c) $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$
 d) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
 e) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2 - \sqrt{3}$, $x = 2 + \sqrt{3}$
 f) $x = -1$, $x = 1$
23. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
 b) $x \in (-1; \infty)$
 c) $x \in \langle -1; \frac{1}{3} \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
 d) $x \in \langle -\sqrt{3}; 1 \rangle \cup \langle \sqrt{3}; 2 \rangle$
 e) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$
 f) $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2} - 2; 1)$
24. $m = -\frac{2}{3}$, $m = 1$
25. $a = \frac{1}{4}$, $a = 9$
26. a) $w(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $A(1, 0)$, $B(2, 0)$
 b) $x \in \langle -2; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \rangle \cup \langle \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty \rangle$
27. $a = -3$, $b = -2$ lub $a = -2$, $b = -3$ lub $a = 2$, $b = 3$ lub $a = 3$, $b = 2$
28. a) $a = -4$ b) $a = -12$
29. a) $a \in \{-2, 1\}$
 b) $a \in \{-1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$
30. $\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$, $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$
31. a) $p = -1$, $q = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$
 b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ lub $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$
33. a) $r(x) = 2$ b) $r(x) = 5$ c) $r(x) = x + 5$
34. $a = -3$, $b = 11$, $c = -6$
35. $m = -3$, $n = 0$ lub $m = -3$, $n = 3$

37. $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 3$
39. a) $x = -\sqrt{5}$, $x = -2$
 b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 5$
40. $x \in (-1 - \sqrt{3}; -1) \cup (\sqrt{3} - 1; 2)$
41. a) $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
 b) $x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$
42. a) $x = 1$, $y = -1$ lub $x = 1$, $y = 1$
 b) $x = 4$, $y = -1$ lub $x = 4$, $y = 1$
45. Wskazówka. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 3)$.
 $x \in \{-2, -1, 0\}$
46. Wskazówka. Zauważ, że lewa strona równania $w(2) + w(-2) = 3$ jest liczbą parzystą, a prawa - nieparzystą.
47. Wskazówka. Rozłóż wielomian w na czynniki i zbadaj podzielność przez 5 kolejno dla argumentów postaci: $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$.

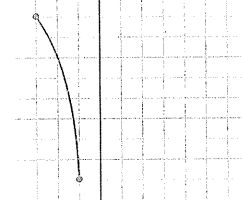
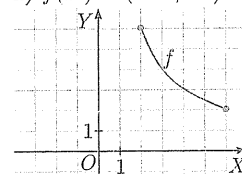
2.1. Proporcjonalność odwrotna

1. $t = \frac{270}{v}$
 a) dla $v = 30$ km/h: $t = 9$ h,
 dla $v = 60$ km/h: $t = 4,5$ h,
 dla $v = 90$ km/h: $t = 3$ h
 b) $t = 6$ h dla $v = 45$ km/h,
 $t = 3,75$ h dla $v = 72$ km/h
2. a) 12 litrów b) 4 atmosfery
3. a) nie b) tak c) tak d) nie
4. a) nie b) tak, P c) nie d) nie
 e) tak, V
5. a) tak, 36 b) tak, 6 c) nie d) tak, 1
6. $f(x) = \frac{50}{x}$
 a) $D = \{\frac{1}{100}, \frac{1}{50}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5\}$
 b) $f(0,1)$ - liczba 10-groszówek,
 $f(\frac{1}{5})$ - liczba 20-groszówek
 c) $f(1) = 50$, $f(2) = 25$
 d) wartość najmniejsza: 10, wartość największa: 5000
7. a) nie b) tak, $y = \frac{3}{x}$ dla $x > 0$
 c) tak, $y = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$

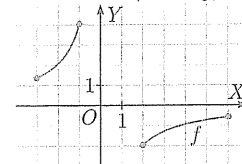
8. a) do f_2 b) f_1 c) do f_3
 d) dla f_1 : 5 oraz $\frac{5}{6}$, dla f_2 : 2,5 oraz $\frac{5}{12}$,
 dla f_3 : 1,25 oraz $\frac{5}{24}$
9. C
10. A
11. C
12. a) $m = -5$, $a = 40$ b) $m = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $a = \frac{1}{2}$
13. a) $P(6, 6)$ b) $P(12, 3)$ c) $P(4, 9)$
14. $f(n) = \frac{48}{n}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$,
 $B = \{1, 2, 3\}$

2.2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

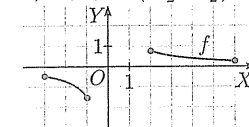
1. a) $f(x) = \frac{4}{x}$, maleje w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$,
 $f(0,4) = 10$
 b) $f(x) = -\frac{8}{x}$, rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$,
 $f(0,4) = -20$
 c) $f(x) = \frac{1}{2x}$, maleje w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$,
 $f(0,4) = \frac{5}{4}$
 d) $f(x) = -\frac{2}{x}$, rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$,
 $f(0,4) = -5$
2. a) $f(D) = \langle -12; -4 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$



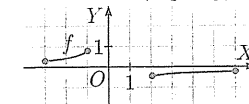
b) $f(D) = \langle -2; -\frac{2}{3} \rangle \cup \langle \frac{4}{3}; 4 \rangle$



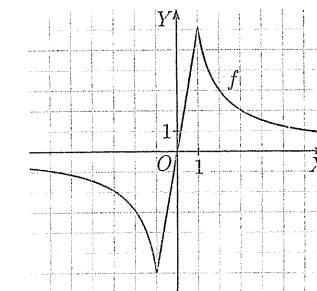
c) $f(D) = \langle -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \rangle$



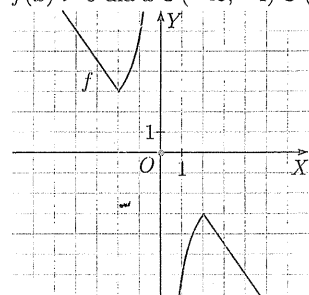
d) $f(D) = \langle -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9} \rangle \cup \langle \frac{2}{9}; \frac{2}{3} \rangle$



3. a) $a = 12$ b) $a = \frac{4}{3}$ c) $a = -16$
 d) $a = 20$
4. a) $a = 14$ b) $a = -10$ c) $a = -\frac{1}{3}$
5. Wskazówka. Jeśli $A(x_A, y_A)$, to
 $P = |x_A| \cdot |y_A| = |x_A y_A| = |a|$
6. a) ćwiartki: I i III, $g(x) = \frac{7}{3x}$, maleje w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$
 b) ćwiartki: I i III, $g(x) = \frac{7}{3x}$, maleje w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$
 c) ćwiartki: II i IV, $g(x) = -\frac{7}{3x}$, rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$
7. D
8. A
9. D
10. B
11. a) $f(D) = \langle -6; 6 \rangle$, nie ma takich argumentów x , dla których $f(x) > 6$



b) $f(D) = (-\infty; -3) \cup \{0\} \cup (3; \infty)$,
 $f(x) > 6$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 0)$



12. a) $y = 0, x = 0, y = x, y = -x$

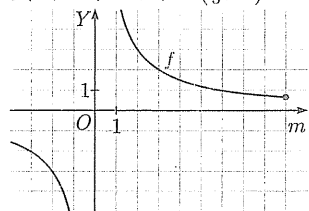
b) $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, \sqrt{5}),$
 $(\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (\sqrt{5}, \sqrt{5})$

13. 4

14. **Wskazówka.** Wystarczy pokazać, że
 równanie $\frac{a}{x} = \frac{b}{x}$ jest sprzeczne, gdy $a \neq b$.

15. a) $a = -12, b = -3$,
 wartość najmniejsza: 3,
 wartość największa: 12,
 $f(x) < -3$ dla $x \in (0; 4)$
 b) $a = -8, b = -2$,
 wartość najmniejsza: 2,
 wartość największa: 8,
 $f(x) < -2$ dla $x \in (0; 4)$
 c) $a = 16, b = 2$,
 wartość najmniejsza: -16,
 wartość największa: -4,
 $f(x) < 2$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (8; \infty)$

16. $f(m) = \frac{6}{m}, D = (-\infty; 0) \cup (0; 9)$,
 $f(D) = (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$



17. $x^2 + y^2 = 18$

2.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

1. a) $g(x) = \frac{2}{x} - 3, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $g(x) = -\frac{4}{x} + 1, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) $g(x) = \frac{3}{x+1}, D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $g(x) = -\frac{8}{x-2}, D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. a) $g(x) = \frac{6}{x-1} - 2$, maleje w $(-\infty; 1)$
 i $(1; \infty)$

b) $g(x) = 2 - \frac{12}{x+4}$, rośnie w $(-\infty; -4)$
 i $(-4; \infty)$

3. a) $y = \frac{9}{x+1} + 3$ b) $y = -\frac{7}{2x-12}$
 c) $y = \frac{5}{4x+16} - 2$ d) $y = -\frac{4}{3x-6} - 5$

4. a) $\vec{u} = [0, -2], y = \frac{3}{2x} - 2, A$ - nie,
 B - tak

b) $\vec{u} = [3, 0], y = \frac{3}{2x-6}, A$ - tak, B - tak

c) $\vec{u} = [-2, 1], y = \frac{3}{2x+4} + 1, A$ - nie,
 B - nie

5. a) $a = 6, p = -2, q = 0, y = 0, x = -2$

b) $a = -3, p = 0, q = 2, y = 2, x = 0$

c) $a = \frac{2}{3}, p = 2, q = 0, y = 0, x = 2$

d) $a = -2, p = -\frac{2}{5}, q = 6, y = 6$,
 $x = -\frac{2}{5}$

6. a) $\vec{u} = [2, 7]$ b) $\vec{u} = [-4, 1]$

c) $\vec{u} = [-4, -6]$ d) $\vec{u} = [1, 3]$

7. a) $y = \frac{2}{x+1} + 5, x = -1, y = 5$

b) $y = 2 - \frac{3}{x-3}, x = 3, y = 2$

c) $y = \frac{11}{x+5} - 4, x = -5, y = -4$

d) $y = \frac{3}{2x+6} - 1, x = -3, y = -1$

8. B

9. B

10. B

11. D

12. a) $y = \frac{1}{x+1} + 2, (-1, 2)$

b) $y = \frac{9}{x} + 3, (0, 3)$

13. a) $\vec{u} = [-2, 0], g(x) = \frac{4}{x+2} - 2$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) $\vec{u} = [1, 0], g(x) = \frac{5}{2x-2} + 5$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(D) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

14. a) $a = -2, b = 4$ b) $a = 2, b = 0$

c) $a = 9, b = -1$

15. a) $g(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$ b) $g(x) = -\frac{2}{x-2} - 1$

c) $g(x) = 3 - \frac{2}{x+2}$ d) $g(x) = -\frac{2}{x-4} - 1$

16. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, g(D) = \mathbb{R} \setminus \{q\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{p\}, g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.4. Funkcja homograficzna

1. $(-4, 0), (-3, -1), (-1, 3), (0, 2)$

2. a) $f(x) = \frac{1}{2}, D = \mathbb{R} \setminus \{6\}, f(D) = \{\frac{1}{2}\}$

b) $f(x) = 4 - 2x, D = \mathbb{R}, f(D) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}, D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$,
 $f(D) = \{-\frac{2}{3}\}$

3. a) $a = -7, p = -3, q = 2, D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, rośnie w $(-\infty; -3)$
 i $(-3; \infty)$

b) $a = 20, p = 5, q = 3, D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, maleje w $(-\infty; 5)$ i $(5; \infty)$

c) $a = \frac{9}{4}, p = -2, q = -1, D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 maleje w $(-\infty; -2)$ i $(-2; \infty)$

d) $a = 3, p = \frac{3}{2}, q = -2, D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

maleje w $(-\infty; \frac{3}{2})$ i $(\frac{3}{2}; \infty)$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = 0$
 dla $x = -4, f(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-6\}, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -4, f(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; \infty)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2, f(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-4; -2)$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(x) = 0$
 dla $x = 2, f(x) \geq 0$ dla
 $x \in (-\infty; 2) \cup (6; \infty)$

5. a) $f(x) = \frac{2}{x+2} - 3, x = -2, y = -3$,
 ćwiartki II, III, IV

b) $f(x) = \frac{-1}{x-2} - \frac{1}{2}, x = 2, y = -\frac{1}{2}$,
 ćwiartki I, III, IV

c) $f(x) = \frac{1}{x+3} + 2, x = -\frac{1}{3}, y = 2$,
 ćwiartki I, II, III

d) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 2, x = \frac{3}{4}, y = 2$,
 ćwiartki I, II, IV

6. a) $x = 1$ b) $x = 0, x = 3$

7. a) $g(x) = \frac{-3}{x+2} + 1$ b) $g(x) = \frac{-3}{x-2} - 1$
 c) $g(x) = \frac{3}{x-2} - 4$

8. $m = 0, f(x) = \frac{-x}{2x+4}, f(x) < 0$ dla
 $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$

9. a) $f(x) = 0$ dla $x = 0, a = 2, b = 0$,
 $p = 3$

b) $f(x) = 0$ dla $x = -5, a = 1, b = 5$,
 $p = -2$

c) $f(x) = 0$ dla $x = 3, a = -1, b = 3$,
 $p = -1$

10. D

11. A

12. C

13. B

14. $a = 4, b = 2, p = -2$

15. a) $k = 0, D = \mathbb{R}, f(D) = \mathbb{R}$

b) $k = -\frac{8}{3}, D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}, f(D) = \{\frac{2}{3}\}$

c) $k = -6, D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, f(D) = \{-3\}$

16. a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = \frac{2+k}{x-2} + 1, (2, 1)$,
 dla $k > -2$ funkcja f maleje w $(-\infty; 2)$
 i $(2; \infty)$, dla $k < -2$ funkcja f rośnie
 w $(-\infty; 2)$ i $(2; \infty)$

b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = \frac{2k+6}{x+k} - 2$,
 $(-k, -2)$, dla $k > -3$ funkcja f maleje
 w $(-\infty; -k)$ i $(-k; \infty)$, dla $k < -3$

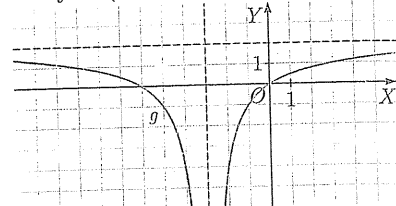
funkcja f rośnie w $(-\infty; -k)$ i $(-k; \infty)$
 c) $k \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(x) = \frac{3k-12}{x-3} + k, (3, k)$,
 dla $k > 4$ funkcja f maleje w $(-\infty; 3)$
 i $(3; \infty)$, dla $k < 4$ funkcja f rośnie
 w $(-\infty; 3)$ i $(3; \infty)$

18. a) $(-k, k)$ b) $f(x) = \frac{-3}{x-1} - 1, f(x) > 0$
 dla $x \in (-2; 1)$

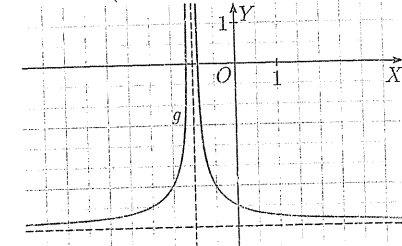
2.5. Przekształcenia wykresu funkcji

1. a) $g(x) = -\frac{|x|}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 $g(D) = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, symetria względem osi OY
 b) $g(x) = 1 - \frac{|x|}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $g(D) = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, najpierw symetria względem osi OX , następnie przesunięcie o wektor $[0, 1]$
 c) $g(x) = \left| \frac{x}{x-1} \right|$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $g(D) = \langle 0; \infty \rangle$, symetria względem osi OX tej części wykresu funkcji f , która leży pod osią OX , pozostała część bez zmian
 d) $g(x) = \frac{|x|}{|x|-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
 $g(D) = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, wykres jest identyczny z wykresem funkcji f dla $x \geq 0$ i jest symetryczny względem osi OY

- c) $g(x) = 2 - \frac{6}{|x+3|}$, $g(D) = (-\infty; 2)$,
 maleje w $(-\infty; -3)$, rośnie w $(-3; \infty)$

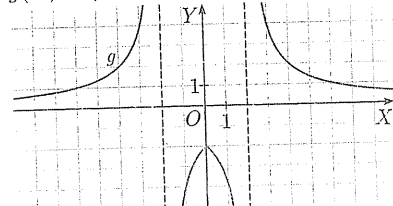


- d) $g(x) = \frac{1}{2|x+1|} - 4$, $g(D) = (-4; \infty)$,
 rośnie w $(-\infty; -1)$, maleje w $(-1; \infty)$

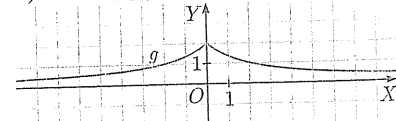


3. a) $a = 1$, $p = 2$, $q = 0$, $f(x) = 1$ dla $x = 1$ lub $x = 3$, brak miejsc zerowych
 b) $a = -4$, $p = 0$, $q = 2$, $f(x) = 1$ dla $x = -4$ lub $x = 4$, $f(x) = 0$ dla $x = -2$ lub $x = 2$
 c) $a = 2$, $p = -3$, $q = -1$, $f(x) = 1$ dla $x = -4$ lub $x = -2$, $f(x) = 0$ dla $x = -5$ lub $x = -1$

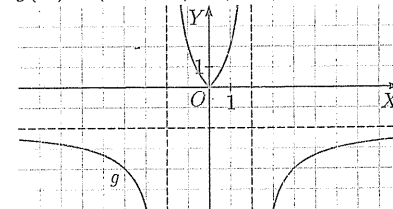
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,
 $g(D) = (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$



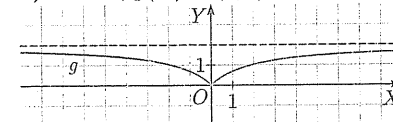
- b) $D = \mathbb{R}$, $g(D) = (0; 2)$



- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,
 $g(D) = (-\infty; -2) \cup \langle 0; \infty \rangle$

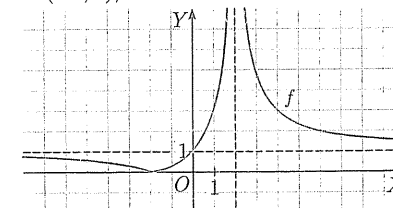


- d) $D = \mathbb{R}$, $g(D) = \langle 0; 2 \rangle$

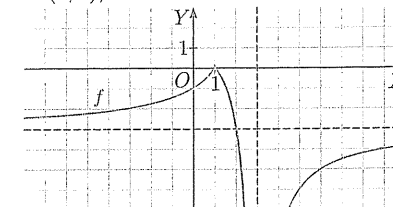


5. a) $g(x) = 2$ dla jednego argumentu,
 $h(x) = -3$ ma dwa rozwiązania
 b) $g(x) = 2$ dla dwóch argumentów,
 $h(x) = -3$ ma jedno rozwiązanie
 c) $g(x) = 2$ dla jednego argumentu,
 $h(x) = -3$ ma dwa rozwiązania
 d) $g(x) = 2$ dla dwóch argumentów,
 $h(x) = -3$ ma jedno rozwiązanie

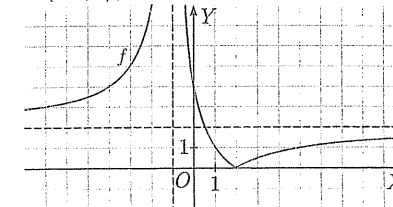
6. a) maleje w $(-\infty; -2)$ i $(2; \infty)$, rośnie w $\langle -2; 2 \rangle$, $m = 0$ lub $m = 1$



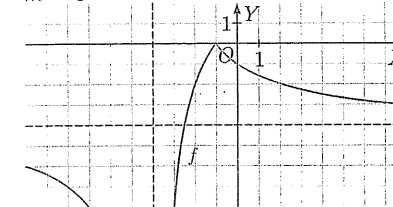
- b) rośnie w $(-\infty; 1)$ i $(3; \infty)$, maleje w $\langle 1; 3 \rangle$, $m = -3$ lub $m = 0$



- c) rośnie w $(-\infty; -1)$ i $\langle 2; \infty \rangle$, maleje w $(-1; 2)$, $m = 0$ lub $m = 2$

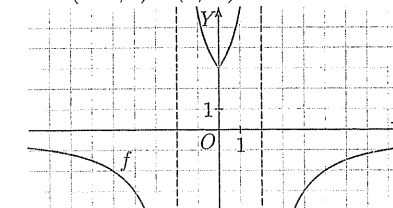


- d) maleje w przedziałach $(-\infty; -4)$ i $\langle -1; \infty \rangle$, rośnie w $(-4; -1)$, $m = -4$ lub $m = 0$

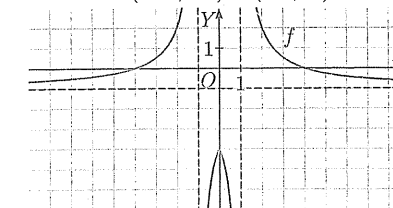


7. $m \geq 2$

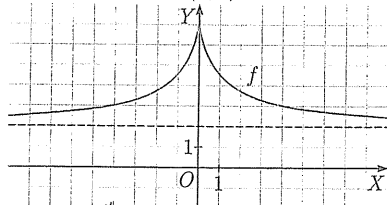
8. a) 0 dla $m \in \langle 0; 3 \rangle$, 1 dla $m = 3$, 2 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$



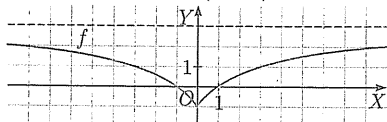
- b) 0 dla $m \in (-4; -1)$, 1 dla $m = -4$, 2 dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$



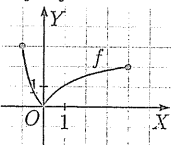
- c) 0 dla $m \in (-\infty; 2) \cup (7; \infty)$, 1 dla $m = 7$, 2 dla $m \in (2; 7)$



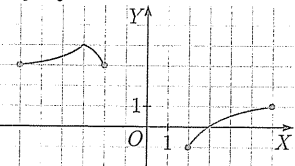
- d) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, 1 dla $m = -1$, 2 dla $m \in (-1; 3)$



9. C
10. B
11. A
12. C
13. a) $g(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
b) $g(x) = \frac{-x-5}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
c) $g(x) = \frac{3x+12}{x+2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
d) $g(x) = \frac{-2x-6}{x+4}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
14. a) wartość najmniejsza: 0, wartość największa: 3



- b) wartość najmniejsza: -1, wartość największa: 4



15. $p(3) = 2$, $p(0) = 0$, $p(m) = 1$ dla $m = \frac{1}{2}$, $m = 2$
16. a) $m \in (0; 1)$ b) $m \in (1; 2)$
17. Wskazówka. Zauważ, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{x}{|x|-2}$ jest $\mathbb{R}$.

2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
b) $D = \mathbb{R}$; 9 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; -1
d) $D = \mathbb{R}$; $\frac{11}{5}$
2. a) $w(0) = 0$, $w(1) = -\frac{1}{3}$, $w(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-4}{7}$
b) $w(0) = -\frac{1}{3}$, $w(1) = 0$,
 $w(\sqrt{2}) = 11\frac{1}{3} - 8\sqrt{2}$
c) $w(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$
d) $w(-2) = -\frac{5}{9}$, $w(0) = -1$, $w(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-7, 0\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$, $\frac{x+2}{2(x-5)^2}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$, $\frac{x-5}{x+5}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $\frac{1}{x+2}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 0, 3\}$, $\frac{(x-3)}{x(x-1)}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$, $\frac{2}{3x-4}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$, $\frac{3}{2x-1}$
6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{4x}{x^2-x+1}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{2}{x(3-x)}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 8\}$, $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
7. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$ b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
8. a) $\frac{10x-14}{2x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$
b) $\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
c) $\frac{(3x-2)(4x-1)}{4x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$
d) $\frac{10x}{3x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$
e) $\frac{2x}{(2x-3)(x-3)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3\}$
f) $\frac{(3x-1)(x+3)}{x(3x+1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 3\}$
9. a) $\frac{2x-1}{4x^2-2x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
b) $\frac{x-2}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 3\}$

- c) $\frac{3x-2}{9x+9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
d) $\frac{1}{(x-2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
e) $\frac{x^2-4}{9x^2-6x+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$
f) $\frac{2x(x-4)}{5x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 2\}$

10. a) $\frac{(x-3)^2}{(x-5)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3, 5\}$
b) $\frac{3(x-2)}{3x-4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, \frac{4}{3}\}$
c) $\frac{x(9x-4)}{3x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}\}$
d) $\frac{x^2-1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2, 3\}$
e) $\frac{2x-9}{6x-6}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{2}, -1, 1\}$
f) $\frac{(x+3)^2}{3x(x-3)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$
11. a) $\frac{(2x-1)^2}{9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5\}$
b) $\frac{9-x^2}{6}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 0, 3, 5\}$
12. D
13. B
14. B
15. a) $m \in (\frac{1}{6}; \infty)$ b) $m \in (-3; 3)$
c) $m \in (0; \frac{2}{3})$
16. a) $\frac{2(x+2)^2}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
b) $\frac{2(5x+2)}{5x^2(2x+5)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, -\frac{2}{5}, 0, \frac{2}{5}\}$
c) $\frac{2x(x+2)}{(x-2)(x-1)}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{2 - \sqrt{3}, 1, 2, 2 + \sqrt{2}\}$
d) $\frac{x}{9x-6}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 2\}$
17. $\frac{2x-5}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, -1, 1, \frac{5}{2}\}$, 8
18. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 6\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3, 6\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3, 6\}$, $h(x) = \frac{(x+5)^2}{(x-6)^2}$,
 $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 3, 6\}$, $k(x) = \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2}$
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $h(x) = \frac{x+2}{x^2(x^2-2x+4)}$,
 $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $k(x) = \frac{x^3+8}{(x-2)^2}$
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$, $h(x) = \frac{x^4}{(2x+3)^2}$,
 $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\}$, $k(x) = (2x-3)^2$
d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}, 0\}$, $h(x) = \frac{(x-2)^3}{(2x+1)^2}$,
 $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}, 0, 2\}$,
 $k(x) = \frac{(x-2)(x+2)^2}{x^2}$
19. a) $\frac{1}{25x^2-5xy+y^2}$, $y \neq -5$
b) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $x \neq y$, $x \neq -y$

- c) $\frac{-2}{3xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq \frac{2}{3}$
d) $\frac{-xy-y}{xy+x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq -1$, $x \neq y$
20. a) $\frac{4(x-2y)}{x+y}$, $x \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$; 1
b) $\frac{x+y-1}{x-y+1}$, $x+y \neq -1$, $x-y \neq -1$; 3

21. a) $\frac{1}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$
b) $\frac{3}{4(x-y)}$, $x \neq y$, $x \neq -y$
c) $\frac{y-x}{3}$, $x \neq y$, $x \neq -y$
d) $\frac{x+3y}{y(x-9x)}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq 9x$

2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

1. a) $\frac{5x(x-5)}{x^2-25}$, $\frac{x(x+5)}{x^2-25}$
b) $\frac{9x+12}{6x-12}$, $\frac{10-14x}{6x-12}$
c) $\frac{3x-21}{18x+12}$, $\frac{4x+8}{18x+12}$
d) $\frac{3}{x(x-2)}$, $\frac{6x}{x(x-2)}$
e) $\frac{(x^2+3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$, $\frac{3x(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)}$
f) $\frac{2x-1}{x^4-16}$, $\frac{4(x^2+4)(x-2)}{x^4-16}$
g) $\frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9}$, $\frac{(3x-1)(x-3)}{x^2-9}$, $\frac{4}{x^2-9}$
h) $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $\frac{4(x^2-1)}{(x-1)^2(x+1)^2}$,
 $\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2(x+1)^2}$
i) $\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$,
 $\frac{6(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$
2. a) $\frac{2x^2+4x+1}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
b) $\frac{x-4}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
c) $\frac{3x+3}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
d) $\frac{5x+1}{(x+2)(x-1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
e) $\frac{x-19}{(x+5)(x-1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$
f) $\frac{12x}{4-x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
g) $\frac{13x+10}{4x^2-16}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
h) $\frac{26x+15}{(1-2x)(x+3)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}\}$
i) $\frac{5x^2-10x-8}{2x(5x+2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}, 0\}$
3. a) $\frac{1}{3(x-2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
b) $\frac{-5}{4(1-2x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
c) $\frac{6-4x}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
d) $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
4. a) $\frac{3x-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
b) $\frac{x^2-3x-6}{3x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$
c) $\frac{-x^3-8}{2x(x+5)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$
d) $\frac{2x-3}{(x-1)(x-3)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

- e) $\frac{12}{x^2-16}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$
 f) $\frac{x^2+8x}{(x-2)^2(x+2)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
 5. a) $\frac{x^2+x}{2(x-1)(x+2)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
 b) $\frac{1}{x^2-4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
 c) $\frac{4x^2}{(x-3)(x+3)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$
 d) $\frac{x^2+8}{x^3+8}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

6. B
 7. C

8. a) $x-3, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 b) $\frac{-8x-3}{4x^2-9}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{3}{2}\}$
 c) $\frac{-3(x-3)}{x+4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 3\}$
 d) $\frac{-12x}{x^2-4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2, 4\}$
 9. a) $a = \frac{7}{5}, b = -\frac{2}{5}$
 b) $a = 3, b = -3$
 c) $a = 3, b = 1$
 d) $a = 2, b = 1$

11. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{999}{1000}$

2.8. Równania wymierne

1. a) $x = 5\frac{3}{4}$ b) brak rozwiązań
 c) brak rozwiązań d) $x = 14$
 e) $x = -16\frac{1}{3}$ f) $x = \frac{3}{2}, x = 2$ g) $x = 7$
 h) $x = -4$ i) $x = \frac{1}{4}$
 2. a) $x = -2, x = 1$ b) brak rozwiązań
 c) $x = 4$ d) brak rozwiązań
 e) $x = -\frac{1}{2}, x = 3$ f) $x = -\frac{1}{4}, x = 6$
 3. a) $x = -1, x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 1$
 d) $x = 6$ e) $x = 2$ f) $x = -1$
 4. a) $m = 1$ b) $m = 1$ c) $m = \frac{67}{32}$
 d) $m = -2$ e) $m = -2, m = 3$ f) $m = 1$
 5. a) $(-5, -4), (1, 2)$ b) $(-1, 4), (-3, -2)$
 6. a) $x = 7$ b) $x = -2, x = 3$ c) $x = 3$
 7. B
 8. D
 9. B
 10. D
 11. $m \in (-\infty; -6) \cup (2; \infty)$

12. $m \in \langle -3; 5 \rangle$

13. a) $x = -\frac{3}{4}, y = -\frac{1}{4}$ lub $x = 1, y = -2$
 b) $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{1}{3}$ lub $x = 2, y = \frac{1}{4}$

14. $(-4, -3), (-3, -4), (3, 4), (4, 3)$

2.9. Nierówności wymierne

1. a) $x \in \langle -3; 0 \rangle$ b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 6; \infty \rangle$ d) $x \in \langle 2; 4 \rangle$
 2. a) $x \in (-\infty; 0)$ b) $x \in (0; 4)$
 c) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{5}{6}; \infty)$ e) $x \in \langle -\frac{4}{3}; 0 \rangle$
 f) $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (0; \infty)$
 3. a) $x \in \langle 2; 8 \rangle$, sześć b) $x \in \langle 1; 4 \rangle$, trzy
 c) $x \in \langle -5; 3 \rangle$, trzy d) $x \in (0; 3)$, trzy
 e) $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$, nieskończenie wiele liczb f) $x \in \langle -3; 4 \rangle$, cztery
 4. a) $x \in (-2; 0) \cup (3; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle 2; \infty \rangle$
 c) $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \langle -3; 1 \rangle$ d) $x \in \langle -3; 3 \rangle$
 e) $x \in (-3; -2) \cup (2; 3)$
 f) $x \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$
 5. a) $x \in (-\infty; -7) \cup (-4; 0)$
 b) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}; 2)$
 c) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$
 d) $x \in \langle -16; -8 \rangle \cup \langle -7; 0 \rangle$
 e) $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (4; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2) \cup (2; \infty)$
 6. a), c), e) tak b), d), f) nie
 7. a) $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 0 \rangle$
 8. C
 9. B
 10. C
 11. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; 1)$
 b) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 12. $x \in \langle -\frac{1}{2}; -\frac{1}{5} \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$
 13. $x \in (-\frac{4}{9}; 0), y \in (-4; 2) \cup (-2; 0)$
 14. a) $m \in (-3; 2)$ b) $m \in (-1; 2)$

2.10. Funkcje wymierne

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}, f(x) = \frac{x}{3x-1},$
 $f(-2) = \frac{2}{7}, f(2) = \frac{2}{5}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, f(x) = \frac{x(x-4)}{x+5},$
 $f(-2) = 4, f(0) = 0, f(2) = -\frac{4}{7}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, f(x) = \frac{4x^2-1}{x^2-1},$
 $f(-2) = \frac{15}{4}, f(2) = \frac{15}{4}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{x^2+2}{x-2},$
 $f(-2) = -\frac{3}{2}, f(0) = -1$
 2. a) tak b) nie c) nie d) tak
 3. a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 2, 5\},$
 $h(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x-5)}, h(x) = 0$ dla $x = 3$
 b) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}, h(x) = \frac{x(x-1)(x+4)}{(x+3)^2},$
 $h(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 1\}$
 c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}, h(x) = \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2},$
 $h(x) = 0$, dla $x = -5$
 d) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -1, 3\},$
 $h(x) = \frac{(x-1)(x^2-9)}{(x+1)(x+4)}, h(x) = 0$, dla $x = 1$
 4. a) $x = 0, x = 2$ b) $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup (0; 1)$
 c) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$
 5. D
 6. C
 7. B
 8. $f - \text{II}, g - \text{III}, h - \text{I}$
 a) $x \in \langle -2; -1 \rangle \cup (1; 2)$
 b) $x \in \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle \cup \{2\}$
 c) $x \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$
 9. $m = -3, m = 1, m = 3$
 10. $m \in (2; \infty)$
 11. a) $a = -5, b = 1$ lub $a = 1, b = -5$
 b) $a = -1, b = 1$ c) $a = 2, b = -1$
 d) $a = -3, b = 2$
 12. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, f(x) = 0$ dla $x = 4,$
 wartość najmniejsza: $-5,$
 wartość największa: -2
 13. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$
 $g(D_g) = (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle,$
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\},$
 $h(D_h) = (-\infty; 1) \cup \langle 4; \infty \rangle$ b) trzy

- c) $m \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (2; \infty)$

14. Wskazówka. Rozwiąż równanie
 $\frac{4x}{x^2+4} = a$ w zależności od wartości
 parametru a .

2.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

1. a) $x = -6, x = 2$ b) $x = \frac{1}{8}, x = \frac{7}{8}$
 c) $x = \frac{4}{9}, x = \frac{7}{8}$ d) $x = \frac{3}{4}$
 e) $x = -2, x = \frac{2}{3}$ f) $x = -6, x = \frac{4}{3}$
 2. a) $x = -2, x = 2$ b) $x = -\frac{8}{3}, x = \frac{2}{3}$
 c) $x = 4$ d) $x = 2$ e) $x = -\frac{12}{5}$
 f) $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
 3. a) $x \in (0; 3)$ b) $x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -11) \cup (1; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -\frac{12}{5}) \cup \langle \frac{4}{5}; \infty \rangle$
 e) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup \langle \frac{11}{2}; \infty \rangle$
 f) $x \in \langle 1; \frac{3}{2} \rangle \cup (\frac{3}{2}; 2)$
 5. a) $x \in (-\infty; \frac{4}{5}) \cup \langle 4; \infty \rangle$ b) $x = \frac{9}{2}$
 c) $x \in (-4; \frac{2}{3})$ d) $x \in \langle -\frac{1}{5}; 1 \rangle \cup (1; 7)$
 e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$
 f) $x \in (-\infty; -32) \cup \langle -\frac{8}{9}; 3 \rangle \cup (3; \infty)$
 6. D
 7. B
 8. A
 9. a) $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$
 b) $x \in \langle -6; -2 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$
 10. a) $x \in (-\infty; 3) \cup \langle 6; \infty \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$ c) $x \in \langle 1; \infty \rangle$
 11. a) $x \in (-1; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$
 b) $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (1; \sqrt{3})$
 c) $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup (-2; \infty)$
 12. a) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 0; 1 \rangle \cup (1; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
 13. a) $x = -6, x = 6$ b) $x = -2, x = 2$
 c) $x = -1, x = 1$
 14. 0 dla $m = 0, 1$ dla $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1),$
 2 dla $m = 1, 3$ dla $m \in (1; \infty)$
 15. $m = 0$
 16. $m \in (3; \infty)$

2.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

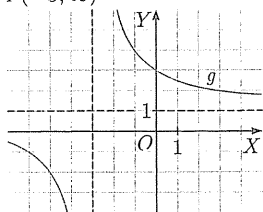
1. $\frac{312}{858}$
2. $p = 42$
3. $\frac{2}{5}$ lub $\frac{5}{2}$
4. $\frac{5}{4}$
5. 4 osoby
6. 14 zł
7. 16 godzin
8. D
9. C
10. 8 minut
11. pan Nowak: 12 godzin, syn: 24 godziny
12. 20 godzin i 30 godzin
13. pierwszy: 20 godzin, drugi: 16 godzin

2.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

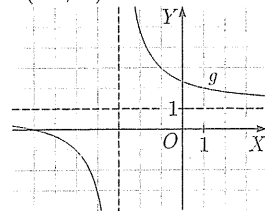
1. z A do B: 45 km/h, z B do A: 60 km/h
2. 12 km/h
3. motocykl: 48 km/h, samochód: 72 km/h
4. pociąg: 90 km/h, autobus: 50 km/h
5. C
6. B
7. A
8. 64 km/h
9. samochód: 45 km/h, rower: 15 km/h

Zestawy powtórzeniowe

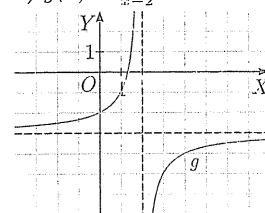
2. $m = -\frac{3}{2}$
3. a) $g(x) = \frac{6}{x+3} + 1$, maleje w $(-\infty; -3)$ i $(-3; \infty)$



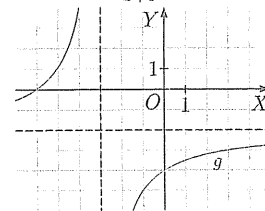
- b) $g(x) = \frac{4}{x+3} + 1$, maleje w $(-\infty; -3)$ i $(-3; \infty)$



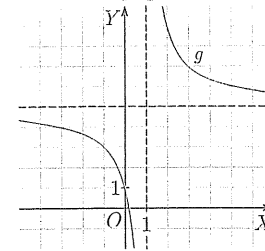
4. a) $g(x) = -\frac{8}{x+2} + 6$ b) $g(x) = \frac{4}{x-5} - 2$
c) $p = -4, q = 2$ d) $f(x) = \frac{3.5}{2x-5} + 4.5$
5. a) $a = -3, b = 3$
b) $x \in (-\infty; -6) \cup (-3; \infty)$
c) $x = -9, x = -1$ d) $x = -1, x = 1$
6. a) $y = \frac{4}{x+1} + 3$ b) $y = \frac{-3}{x-4} + 3$
7. a) $g(x) = \frac{-2}{x-2} - 3$



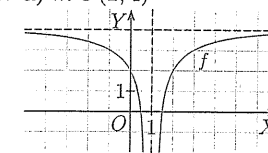
- b) $g(x) = \frac{-6}{x+3} - 2$



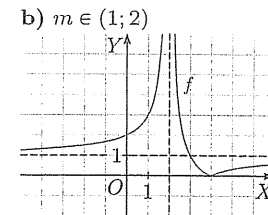
- c) $g(x) = \frac{4}{x-1} + 5$



8. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, f(x) = 0$ dla $x = 2$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}, f(x) = 0$ dla $x = -1$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, f(x) = 0$ dla $x = -2, x = \frac{1}{2}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}, f(x) = 0$ dla $x = 5 - 2\sqrt{7}, x = 5 + 2\sqrt{7}$



9. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{2x+1}{2-x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
b) $\frac{x+8}{4-x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
c) $\frac{4x-1}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
d) $\frac{2x^2+6x+1}{(x-1)^2(x+2)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
e) $\frac{2-4x}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$
f) $2x, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$
10. a) $x = -15$ b) $x = \frac{1}{2}, x = 1$
c) $x = -5, x = 2$ d) $x = -\frac{1}{2}, x = 2$
e) $x = \frac{1}{5}$ f) $x = \frac{1}{2}, x = 3$



11. a) $x = 0, x = 5$ b) brak rozwiązań
c) $x = -1$

12. a) $x = \frac{4}{9}, x = \frac{8}{7}$ b) $x = -2, x = 6$
c) $x = -13, x = 3$

13. a) $x \in (-\infty; -7) \cup (4; \infty)$
b) $x \in (-1; 0)$
c) $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-2; 2)$
e) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$
f) $x \in (-2; -1) \cup (3; \infty)$
g) $x \in \langle -12; -\frac{5}{2} \rangle \cup (\frac{2}{3}; \infty)$
h) $x \in \langle -5; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$
i) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$

14. a) $x \in \langle 4\frac{2}{3}; 6 \rangle \cup (6; 7\frac{1}{3})$
b) $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$
c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-4; 4) \cup \langle 7; \infty \rangle$

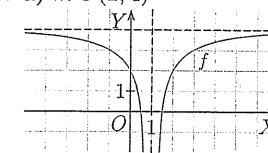
15. a) $D = (-\infty; -4) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
b) $D = (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
c) $D = \{0\}$

16. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
b) $x \in (2; 3) \cup (4; \infty)$
c) $x \in \langle 0; 2 \rangle \cup (2; \infty)$
d) $x \in \langle -3; -2 \rangle \cup \{0\} \cup (2; 3)$

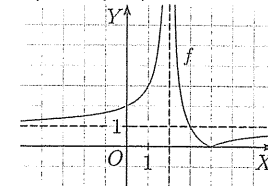
17. a) $x \in (-2; -1) \cup \langle 1; 2 \rangle$
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

- c) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 2) \cup (2; 4)$
d) $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 2 \rangle \cup (2; 4)$

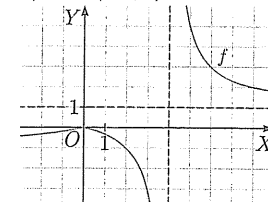
18. a) $m \in (2; 4)$



- b) $m \in (1; 2)$



- c) $m \in (-1; 0)$



19. a) $x \in (-3; -2)$
b) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
20. $m \in (-1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$
21. $m \in (-1; 9)$
25. 90 km/h
26. 9 dni
27. a) $g(x) = \frac{2}{|x|+1} - 1, h(x) = \left| \frac{2}{x+1} - 1 \right|$
 $g(x) = h(x)$ dla $x \in \langle 0; 1 \rangle$
b) $g(x) = \frac{4}{2-|x|} - 1, h(x) = \left| \frac{4}{2-x} - 1 \right|$
 $g(x) = h(x)$ dla $x \in \langle 0; 2 \rangle$
28. a) $x = -3, y = 3$ lub $x = 0, y = 0$
b) $x = 1, y = -2$ lub $x = 6, y = 3$
29. a) $m = 0$ b) $m \in (-\frac{1}{3}; 1)$ c) $m \in \langle 9; \infty \rangle$
30. $m \in (\frac{1}{2}; \frac{4}{3})$
31. $m = 2$
32. $f(m) = \frac{-1}{2m} + 1$, gdzie $m \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

33. $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

34. a) $x = -1, x = 1$

3.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

1. a) nie b) nie c) tak

2. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5};$
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$

b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4};$
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$

c) $\sin \alpha = \frac{7\sqrt{130}}{130}, \cos \alpha = \frac{9\sqrt{130}}{130};$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{9}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{9}{7}$

3. a) $20 + 10\sqrt{2}$ b) $9 + 3\sqrt{5}$ c) 24
d) $12 + 12\sqrt{5}$

4. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{2}$

b) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}, \cos \alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41},$
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = 3$

d) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}, \cos \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29},$
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{2}$

5. a) np. $P(-\sqrt{5}, 2)$

b) np. $P(1, -\sqrt{15})$

c) np. $P(-3, -4)$

7. a) $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$
 $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}, \operatorname{ctg} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 210^\circ = \sqrt{3}$

c) $\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$
 $\operatorname{tg} 315^\circ = -1, \operatorname{ctg} 315^\circ = -1$

8. a) $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$
 $\operatorname{tg} 225^\circ = 1, \operatorname{ctg} 225^\circ = 1$

b) $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 300^\circ = \frac{1}{2},$
 $\operatorname{tg} 300^\circ = -\sqrt{3}, \operatorname{ctg} 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 240^\circ = -\frac{1}{2},$
 $\operatorname{tg} 240^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. a) nie b) nie c) tak, w ćwiartce III

10. B

11. D

12. B

13. a) nie b) nie c) tak d) nie

14. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$ lub
 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$

b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ lub
 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$

c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$
lub $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10},$

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$

d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}, \cos \alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26},$
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{5}$ lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26},$

$\cos \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{5}$

15. a)

α	72°	144°	216°	288°
$\sin \alpha$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

b)

α	36°	108°	252°	324°
$\sin \alpha$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$	$-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

16. $-\frac{13\sqrt{3}}{12}$

3.2. Kąt obrotu

1. a) np. $391^\circ, 751^\circ, -329^\circ$

b) np. $-237^\circ, 483^\circ, 843^\circ$

c) np. $-80^\circ, -440^\circ, 280^\circ$

2. a) $\beta = -405^\circ$ b) $\beta = 2115^\circ$

c) $\beta = 3195^\circ$

3. a) $\sin 780^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 780^\circ = \frac{1}{2},$

$\operatorname{tg} 780^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 780^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sin(-930^\circ) = \frac{1}{2}, \cos(-930^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\operatorname{tg}(-930^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg}(-930^\circ) = -\sqrt{3}$

c) $\sin 765^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 765^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$\operatorname{tg} 765^\circ = 1, \operatorname{ctg} 765^\circ = 1$

d) $\sin(-585^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-585^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$
 $\operatorname{tg}(-585^\circ) = -1, \operatorname{ctg}(-585^\circ) = -1$

4. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1

5. a) $1 \cdot 360^\circ + 43^\circ$ b) $-2 \cdot 360^\circ + 186^\circ$
c) $2 \cdot 360^\circ + 141^\circ$ d) $-3 \cdot 360^\circ + 236^\circ$

6. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$
f) $-\sqrt{3}$ g) 1 h) 0 i) $-\sqrt{3}$

7. a) $\alpha = 405^\circ; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = 1,$
 $\operatorname{ctg} \alpha = 1$

b) $\alpha = 480^\circ; \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\alpha = -420^\circ; \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2},$
 $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\alpha = -675^\circ; \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$
 $\operatorname{tg} \alpha = 1$

8. a) $-\frac{11\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 6 d) $\frac{1}{2}$
e) $-3\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$ f) 0

9. C

10. D

11. B

12. B

13. a) dodatni b) ujemny

14. a) 945° b) 720°

15. tak

16. a) $P'(-2\sqrt{3}, 2)$

b) $P'(2\sqrt{3}, -2)$

c) $P'(-4, 0)$

d) $P'(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

17. większe 18 000, mniejsze 90 000

3.3. Miara łukowa kąta

1. a) $3(\pi - 3) < \frac{17}{40}$ b) $5\pi > 15,7$

c) $\frac{\pi}{5} < \frac{1257}{2000}$ d) $\frac{1}{\pi} > 0,316$

2. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{5\pi}{12}$ c) $\frac{11\pi}{18}$ d) $\frac{2\pi}{9}$ e) $\frac{\pi}{12}$

f) $\frac{2\pi}{5}$ g) $\frac{4\pi}{5}$ h) $\frac{7\pi}{6}$

3. a) 30° b) 36° c) 315° d) 300°

e) $157,5^\circ$ f) 675° g) 480° h) 330°

4. a) π b) 2π c) 3π d) 4π e) $(n-2)\pi$

5. a) tak b) nie c) tak d) tak

6. $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ lub $\frac{3}{8}\pi$ i $\frac{3}{8}\pi$

7. a) $\beta = \frac{5}{4}\pi$ b) $\beta = \frac{21}{4}\pi$ c) $\beta = -\frac{3}{4}\pi$
d) $\beta = -\frac{27}{4}\pi$

8. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 1 e) $-\frac{1}{2}$ f) -1
g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $-\frac{1}{2}$

9. a) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ b) $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ c) $\alpha = \frac{7}{5}\pi$
d) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ e) $\alpha = \frac{6}{7}\pi$ f) $\alpha = \frac{7}{4}\pi$

g) $\alpha = \frac{27}{16}\pi$ h) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$
i) $\alpha = (4 - \sqrt{5})\pi$

10. a) -1 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
f) $\sqrt{3}$ g) -1 h) $-\sqrt{3}$

11. D

12. B

13. A

14. a) $\frac{15271}{108000}\pi$ b) $\frac{8011}{21600}\pi$ c) $\frac{8473}{14400}\pi$

15. a) $\frac{11}{12}\pi$ b) $\frac{7}{18}\pi$ c) $\frac{47}{72}\pi$ d) $\frac{19}{24}\pi$

16. 16.55

17. $\alpha = \frac{5}{4}$

18. a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ b) $\alpha = \frac{1}{2}$ c) $\alpha = 2\pi - \frac{7}{3}$

3.4. Funkcje okresowe

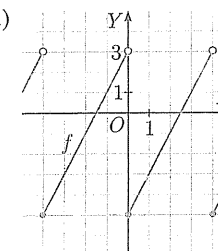
1. $D = \mathbb{R} \setminus \{3 + 6k : k \in \mathbb{C}\}, f(D) = \langle 0; \infty \rangle,$
 $x = 102, x = 108$

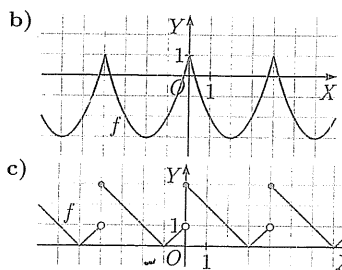
2. a) $T = 3; f(7) = 4, f(-19) = 4,$
 $f(120) = 0$

b) $T = 4; f(7) = 4, f(-19) = 3,$
 $f(120) = 5$

3. a) -2 b) 1 c) -1 d) 0

4. a)





5. b) 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9 c) 3333

6. b) -1 c) 0

7. a) $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$
b) $x \in \langle -2; 8 \rangle$ c) $x \in \{-2, 2, 6\}$

8. B

9. D

10. B

11. a) $x = 1 + 2k, k \in \mathbb{C}$
b) $x = -\sqrt{3} + 4k$ lub $x = \sqrt{3} + 4k, k \in \mathbb{C}$
c) $x \in \langle -1 + 4k; 1 + 4k \rangle, k \in \mathbb{C}$
d) $x \in (\sqrt{2} + 4k; 4 - \sqrt{2} + 4k), k \in \mathbb{C}$

12. tak; $T = 2$

13. a) nie b) tak

14. **Wskazówka.** Jeśli T jest okresem funkcji f i $k \in \mathbb{C}$, to

$$g(x + kT) = af(x + kT) + b = af(x) + b = g(x).$$

Ponadto $f(x) = \frac{1}{a}g(x) - \frac{b}{a}$, więc każdy okres funkcji g jest też okresem funkcji f .

15. Funkcja g jest okresowa i T jest jej okresem, ale nie musi być jej okresem podstawowym.

16. $T_h = \text{NWW}(T_f, T_g)$

17. **Wskazówka.** Jeśli funkcja f jest okresowa o okresie T i $f(x_0) = 0$, to $f(x_0 + kT) = 0$ dla $k \in \mathbb{C}$.

3.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

1. a) $x = \frac{\pi}{2}$ b) $x = -\frac{\pi}{2}$

c) $x = -\pi, x = 0, x = \pi$

d) $x = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}$

3. a) $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = -\frac{3\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

c) $x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}$ d) $x = -\frac{2\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$

4. a), b), d) dodatni c) ujemny

5. a) $x = \frac{34\pi}{3}, x = \frac{35\pi}{3}$

b) $x = -\frac{23\pi}{4}, x = -\frac{17\pi}{4}$

c) $x = \frac{23\pi}{3}, x = \frac{25\pi}{3}$

d) $x = -4\pi, x = -3\pi$

6. a) 7 b) 3 c) 10 d) 5

7. a) $\frac{13\pi}{6}$ b) $-\frac{11\pi}{3}$ c) $\frac{23\pi}{6}$

8. a) maleje w $\langle -3\pi; -\frac{5}{2}\pi \rangle$ i $\langle -\frac{3}{2}\pi; -\pi \rangle$,

rośnie w $\langle -\frac{5}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi \rangle$

b) rośnie w $\langle -\pi; 0 \rangle$ i $\langle \pi; 2\pi \rangle$,

maleje w $\langle 0; \pi \rangle$

9. a) $a = -1$ b) $a = 1$

10. a) $k = 9, k = 10$ b) $k = 17, k = 18$

11. a) 9π b) 4π c) 8π d) $\frac{9}{2}\pi$

12. C

13. C

14. A

15. a) $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

c) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

d) brak rozwiązań

e) $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

f) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

16. a) $x = 0$ b) $x = 0$

17. a) $x = \frac{25\pi}{12}, x = \frac{35\pi}{12}$

b) $x = -\frac{15\pi}{7}, x = -\frac{13\pi}{7}, x = -\frac{\pi}{7}$

c) $x = -\frac{\pi}{8}, x = \frac{\pi}{8}$ d) $x = -\frac{\pi}{9}$

18. trzy

19. $k \in \langle -4; 0 \rangle$

20. $g(m) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m \in \{-1, 1\} \\ 2 & \text{dla } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ 3 & \text{dla } m = 0 \end{cases}$

3.6. Wykresy funkcji tangens i cotangens

1. a) $x = \frac{\pi}{3}$ b) $x = -\frac{\pi}{4}$ c) $x = 0$

d) $x = -\frac{\pi}{6}$

2. a) $x = -\frac{2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}$ b) $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

c) $x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$ d) $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$

3. a), c) ujemny b), d) dodatni

4. a) $x = \frac{65\pi}{6}$ b) $x = -\frac{17\pi}{3}$ c) $x = \frac{37\pi}{6}$

d) $x = -2\pi$

5. a) 4 b) 5 c) 10 d) 4

6. a) $\frac{9\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{25\pi}{6}$

7. a) $-\frac{9\pi}{4}$ b) $-\frac{3\pi}{4}$ c) -2π d) $-\pi$

8. a) $x_1 = -\frac{9\pi}{14}, x_2 = \frac{19\pi}{14}$

b) $x_1 = \frac{4\pi}{5}, x_2 = \frac{9\pi}{5}$

9. D

10. A

11. D

12. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

13. a) 8 b) 4 c) 4

14. 12

15. a) $x = \frac{\pi}{9} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

b) $x = \frac{5\pi}{9} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

c) $x = \frac{\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

d) $x = \frac{1\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

16. a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c) $-\sqrt{2}-1$

d) $1 - \sqrt{2}$

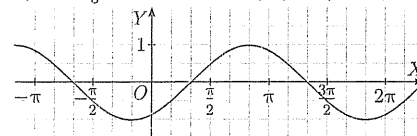
17. a), d), e) parzysta

b) ani parzysta, ani nieparzysta

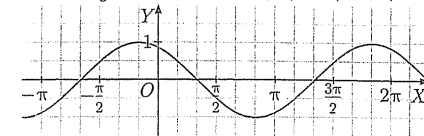
c), f) nieparzysta

3.7. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

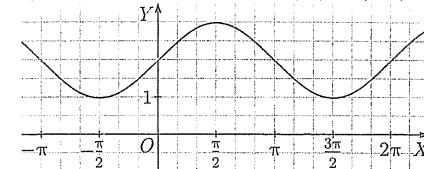
1. a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -1; 1 \rangle$



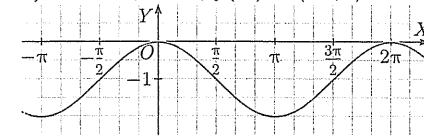
b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -1; 1 \rangle$



c) brak miejsc zerowych; $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$

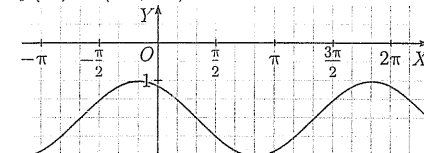


d) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -2; 0 \rangle$

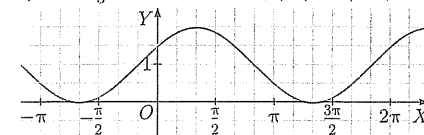


e) brak miejsc zerowych;

$f(D) = \langle -3; -1 \rangle$

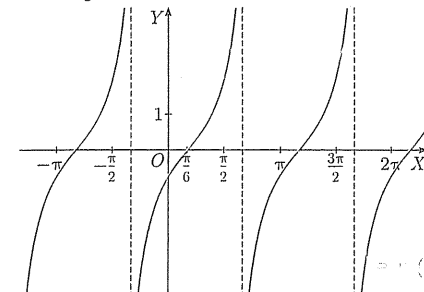


f) $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle 0; 2 \rangle$

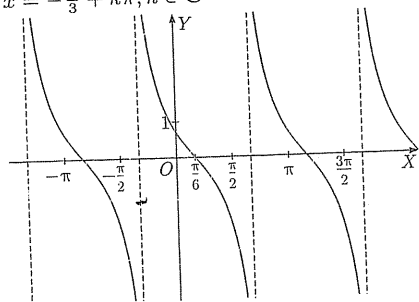


2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{C}\};$

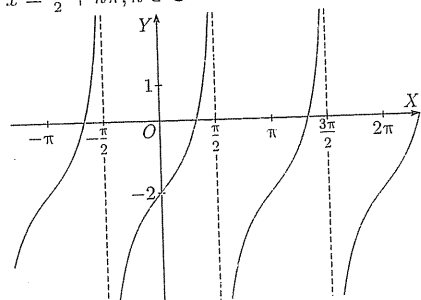
$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$



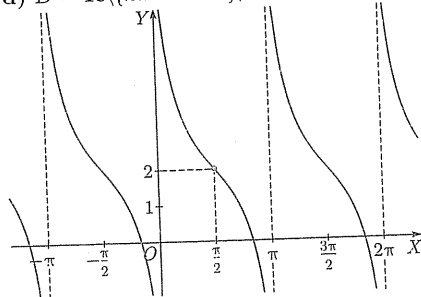
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{C}\};$
 $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$



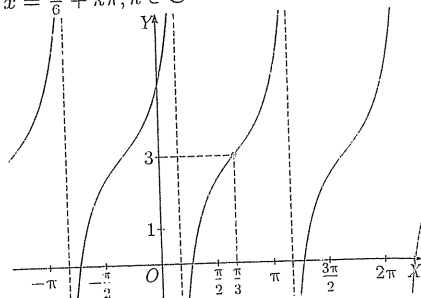
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\};$
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$



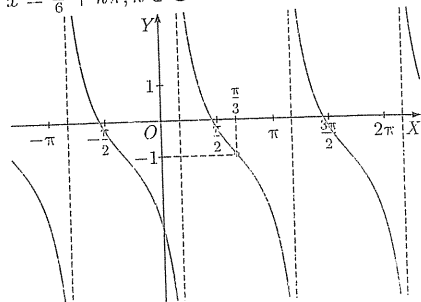
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{C}\}; x = k\pi, k \in \mathbb{C}$



e) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{C}\};$
 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$



f) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{C}\};$
 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$



3. a) 3 b) 2 c) 4 d) 2

4. a) $D = \mathbb{R}$; brak miejsc zerowych;
 $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$
b) $D = \mathbb{R}$; $x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$; $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
c) $D = \mathbb{R}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$;
 $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$
d) $D = \mathbb{R}$; brak miejsc zerowych;
 $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\};$
 $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$; $f(D) = \mathbb{R}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{C}\};$
 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$; $f(D) = \mathbb{R}$

5. a) maleje w $\langle -\pi; -\frac{2}{3}\pi \rangle$ i $\langle \frac{2}{3}\pi; \pi \rangle$, rośnie w $\langle -\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{3} \rangle$
b) rośnie w $\langle 0; \frac{2}{3}\pi \rangle$, maleje w $\langle \frac{2}{3}\pi; \pi \rangle$
c) maleje w całej dziedzinie
d) rośnie w całej dziedzinie

6. a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
b) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$ d) $x = k\pi, k \in \mathbb{C}$
7. a) $m = \frac{\pi}{3}, k = 1$ b) $m = -\frac{2\pi}{3}, k = -\frac{3}{2}$
c) $m = \frac{\pi}{2}, k = \frac{1}{2}$

8. D

9. B

10. B

11. a) $a \in \mathbb{R}, b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

b) $a = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}$

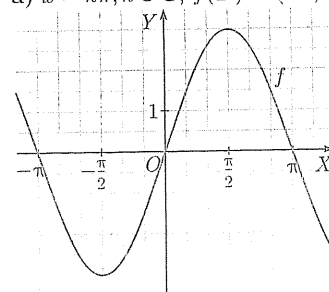
12. $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) =$
 $= \operatorname{ctg}(-x + \frac{3\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}(x + \frac{5\pi}{2}),$
 $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(-x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) =$
 $= \operatorname{tg}(-x + \frac{3\pi}{2}) = -\operatorname{tg}(x + \frac{5\pi}{2}),$
 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2}) =$
 $= -\operatorname{ctg}(x + \frac{5\pi}{2}),$
 $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) =$
 $= -\operatorname{tg}(x + \frac{5\pi}{2}).$

13. 0 dla $k \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty),$
1 dla $k \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\},$
2 dla $k \in (-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0) \cup$
 $\cup (0; \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2})$
3 dla $k \in \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

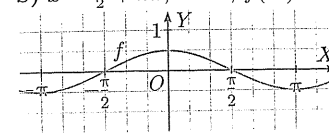
14. dla $m \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$ wartość najmniejsza:
 $2 - \cos(-m)$, wartość największa: 3;
dla $m \in (0; \frac{\pi}{2})$ wartość najmniejsza: 1,
wartość największa: $2 - \cos(\pi - m)$

3.8. Przekształcenia wykresu funkcji (1)

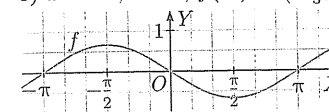
1. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -3; 3 \rangle$



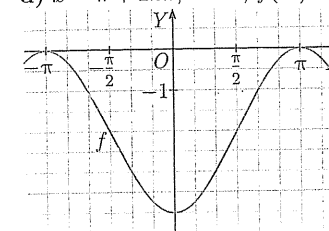
b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$



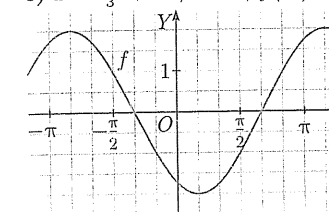
c) $x = k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \rangle$



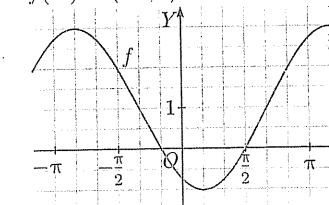
d) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -4; 0 \rangle$



e) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}; f(D) = \langle -2; 2 \rangle$



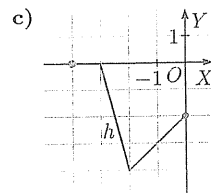
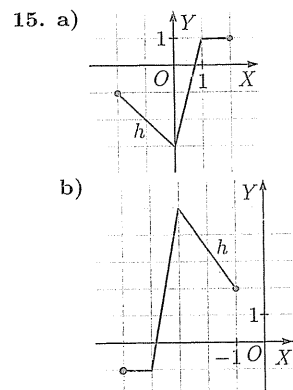
f) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C};$
 $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$



2. $a = 2, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
4. a) $a = 6$ b) $a = -\sqrt{2}$ c) $a = -2, a = 2$
d) $a = -4, a = 4$
5. a) $k = 3(\sqrt{3} - 1)$ b) $k = -5$
c) $k = -\frac{3}{2}, k = \frac{3}{2}$ d) $k = -6, k = 6$
6. a) 2 b) 3 c) 2 d) 1
7. a) $x = -\frac{2\pi}{3}, x = 0$
b) maleje w $\langle -\pi; -\frac{\pi}{3} \rangle$ i $\langle \frac{2\pi}{3}; \pi \rangle$,
rośnie w $\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \rangle$
c) $x \in \langle -\pi; -\frac{2\pi}{3} \rangle \cup (0; \pi)$
8. a) $f(D) = \langle -2; 2 \rangle$
b) rośnie w $\langle -\pi; -\frac{2\pi}{3} \rangle$ i $\langle \frac{\pi}{3}; \pi \rangle$,
maleje w $\langle -\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \rangle$
c) $x \in \langle -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \rangle$
9. B
10. D
11. A
12. 0 dla $m \in (2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5})$,
1 dla $m \in (-\infty; -3) \cup (-1; 2 - \sqrt{5}) \cup \langle 2 + \sqrt{5}; \infty \rangle$, 2 dla $m \in \langle -3; -1 \rangle$
13. a) $x \in (-\frac{\pi}{6}; 0)$
b) $x \in (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$
c) $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 \in (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$
14. a) 2, 6, 10
b) 1, 5, 9
c) brak miejsc zerowych



3.9. Przekształcenia wykresu funkcji (2)

1. f: czerwony, $T = 2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{C}$;
g: niebieski, $T = \pi, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$;
h: zielony, $T = 4\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$.
2. a) $T = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$
b) $T = 8\pi, x = 4k\pi, k \in \mathbb{C}$
c) $T = 3\pi, x = \frac{3}{2}k\pi, k \in \mathbb{C}$
d) $T = 2, x = k, k \in \mathbb{C}$
e) $T = \pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
f) $T = 4\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
g) $T = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{C}$
h) $T = 8\pi, x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{C}$
3. a) $T = \pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$
b) $T = \pi, f(D) = \langle -1; 1 \rangle$
c) $T = \frac{2}{3}\pi, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$
d) $T = 8\pi, f(D) = \langle -4; 4 \rangle$
e) $T = 4\pi, f(D) = \langle -3; 3 \rangle$
f) $T = 2, f(D) = \langle -2; 2 \rangle$
4. f: niebieski, $T = \pi, x = k\pi, k \in \mathbb{C}$;
g: czerwony, $T = \frac{\pi}{2}, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$;
h: zielony, $T = 2\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$.
5. a) $-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ b) 0
c) $-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$
6. f: zielony, 3 miejsca zerowe
g: niebieski, 10 miejsc zerowych
h: czerwony, 2 miejsca zerowe
7. a) $a \in \mathbb{R}$ b) $a \in \mathbb{R}$ c) $a \in \mathbb{R}$
d) $a \in \langle 0; 1 \rangle$ e) $a \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$ f) $a \in \mathbb{R}$
8. C
9. A
10. A

11. a) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$, wartość
najmniejsza: -1, wartość największa: 1
b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{1}{2} \cos 4x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$, wartość
najmniejsza: $-\frac{1}{2}$, wartość największa: $\frac{1}{2}$
c) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ \lg x - 1, x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{-\frac{\pi}{2} - n\pi : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$
brak wartości najmniejszej i największej,

12. $\alpha = \frac{3}{4}\pi, x = 2 - 2\sqrt{2}, x = 2 + 2\sqrt{2}$

13. a) $D = \langle -4; 8 \rangle$ b) $D = \langle -\frac{1}{2}; 1 \rangle$

14. a) $D = (0; \frac{\pi}{2})$ b) $\alpha = \frac{\pi}{4}, 4 + 2\sqrt{2}$

15. a) $D_g = \langle -1; 2 \rangle$

$$g(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (1; 2) \end{cases}$$

$$D_h = \langle -4; 8 \rangle$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{dla } x \in \langle -4; 4 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (4; 8) \end{cases}$$

b) $D_g = \langle 0; 3 \rangle$

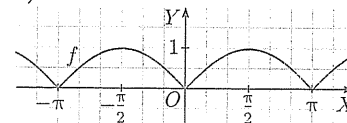
$$g(x) = \begin{cases} -(2x - 1)^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle \\ 2x - 2 & \text{dla } x \in (1; 3) \end{cases}$$

$$D_h = \langle 0; 12 \rangle$$

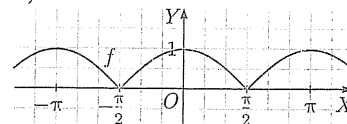
$$h(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{2}x - 1)^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 4 \rangle \\ \frac{1}{2}x - 2 & \text{dla } x \in (4; 12) \end{cases}$$

3.10. Przekształcenia wykresu funkcji (3)

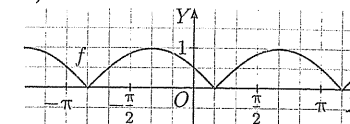
1. a) $T = \pi$



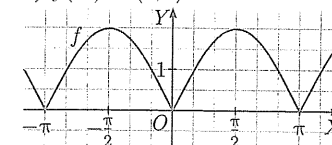
b) $T = \pi$



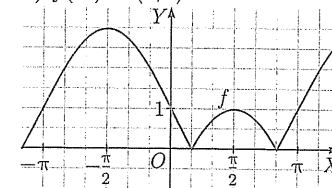
c) $T = \pi$



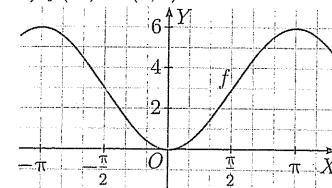
2. a) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$



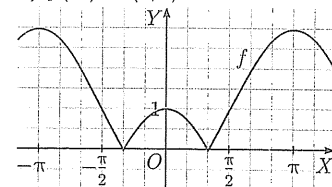
b) $f(D) = \langle 0; 3 \rangle$



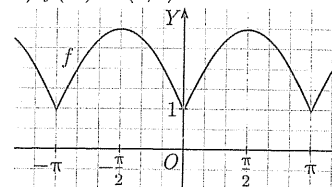
c) $f(D) = \langle 0; 6 \rangle$



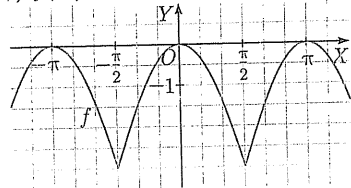
d) $f(D) = \langle 0; 3 \rangle$



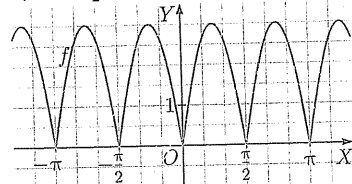
e) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$



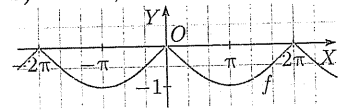
f) $f(D) = \langle -3; 0 \rangle$



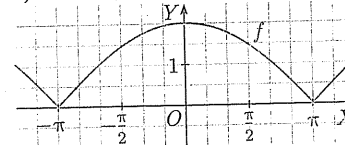
3. a) $T = \frac{\pi}{2}, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$



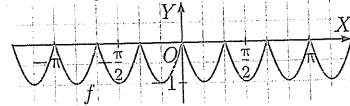
b) $T = 2\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$



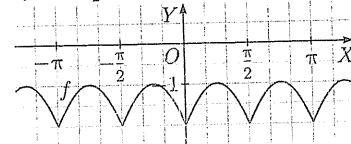
c) $T = 2\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{C}$



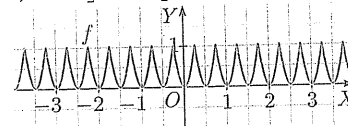
d) $T = \frac{\pi}{3}, x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$



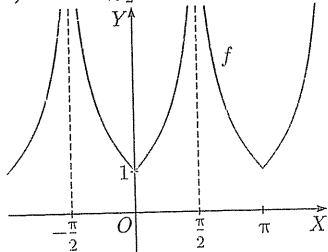
e) $T = \frac{\pi}{2}$, brak miejsc zerowych



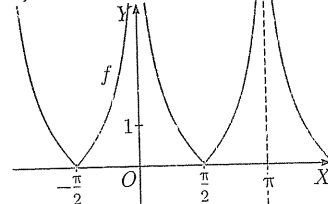
f) $T = \frac{1}{2}, x = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{C}$



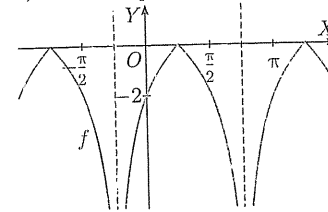
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$



b) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{C}\}$



c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\pi + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$



5. a) $a \in \langle 0; \infty \rangle$ b) $a \in \langle -1; \infty \rangle$

c) $a \in \langle -\infty; 0 \rangle$

6. $f(x) > 0$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2} - k\pi; -k\pi) \cup (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{N}$

a) rosnąca b) malejąca c) rosnąca

7. a) $f(D) = \langle 0; 2 \rangle$ b) $f(D) = \langle 1; 3 \rangle$

c) $f(D) = \langle -5; -1 \rangle$ d) $f(D) = \mathbb{R}$

e) $f(D) = \mathbb{R}$ f) $f(D) = \mathbb{R}$

8. a) $f(D) = \langle -4; 4 \rangle$ b) $f(D) = \langle 0; 4 \rangle$

c) $f(D) = \langle -3; 2 \rangle$ d) $f(D) = \langle 6; 8 \rangle$

e) $f(D) = \langle 4; \infty \rangle$ f) $f(D) = \langle -5; -3 \rangle$

9. D

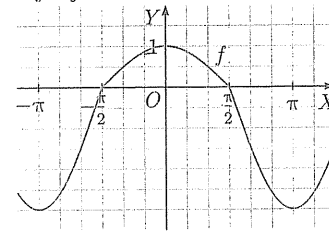
10. D

11. D

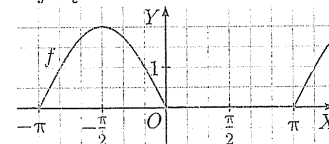
12. a) $a = -6, b = 5$ lub $a = 6, b = -1$

b) $a = -3, b = 2$ lub $a = 3, b = 2$

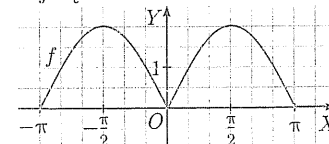
13. a) wartość najmniejsza: -3, wartość największa: 1



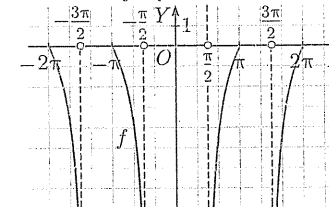
b) wartość najmniejsza: 0, wartość największa: 2



c) wartość najmniejsza: 0, wartość największa: 2



d) wartość najmniejsza: nie istnieje, wartość największa: 0



14. a) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

b) $x = -\frac{\pi}{4} - k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}$

15. 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$,

2 dla $m = \frac{3}{2}$,

4 dla $m \in \{0\} \cup (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$,

5 dla $m = \frac{1}{2}$,

8 dla $m \in (0; \frac{1}{2})$

16. $g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty) \\ 2 & \text{dla } m \in \{0, 2\} \\ 3 & \text{dla } m = 1 \\ 4 & \text{dla } m \in (0; 1) \cup (1; 2) \end{cases}$

3.11. Tożsamości trygonometryczne

1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$ c) $x \in \mathbb{R}$

2. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

3. a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

4. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

5. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{C}\}$

6. a) $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{4}, \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{2}$

b) $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{4}, \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{2}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{14}}{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{14}}{2}, \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{14}}{7}$

d) $\sin x = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{10}, \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{7}$

e) $\sin x = -\frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}, \operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3}$

f) $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{ctg} x = 1$

7. a) $\sin x = -\frac{\sqrt{14}}{4}, \operatorname{tg} x = -\sqrt{7}, \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$

8. C

9. A

10. A

11. a) $-\frac{2}{5}$ b) $\frac{17}{25}$ c) $\frac{7\sqrt{5}}{25}$ d) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

12. a) $\frac{1}{2\sin^2 x - 1}, -9$ b) $\frac{1}{\sin x}, \frac{3}{2}$

c) $\frac{1 - \sin^2 x}{1 - 2\sin^2 x}, 5$

13. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C} \right\}$
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{C} \right\}$

14. a) tak b) tak

15. a) 7 b) 18 c) $\sqrt{5}$

16. a) $\frac{\lg x - 1}{\lg x + 1}, \frac{3}{5}$
 b) $\frac{\lg x}{\lg^2 x - 1}, \frac{4}{15}$

c) Wskazówka. Wykorzystaj tożsamość

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\lg^2 x + 1}{2 \lg^2 x}, \frac{17}{32}$$

3.12. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

- a) $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,
 $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
 b) $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\cos 240^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$
- a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
 d) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
 g) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ h) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$
- a) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{6 - 4\sqrt{21}}{25}$,
 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3\sqrt{21} - 8}{25}$
 b) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$
- a) $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2k + 1), k \in \mathbb{C}$
 c) $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 d) $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
 $\alpha \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 f) $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
- a) $\sin 2\alpha = 0,6$, $\lg \alpha = \frac{1}{3}$
 b) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\lg \alpha = -2$
- a) $\sin 4\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, b) $\sin 4\alpha = \frac{24}{25}$
- b) Wskazówka. Wykorzystaj tożsamość
 $(\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)$
- C
- D

11. A

12. a), b), c), d) tak

13. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
 b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

14. $\lg \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\lg 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{31}$

15. $\lg(\alpha + \beta) = \frac{a+b}{1-ab}$ i $\lg(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{1+ab}$
 a) $2 - \sqrt{3}$ b) $2 + \sqrt{3}$ c) $-2 - \sqrt{3}$

16. $\lg x = \frac{5}{7}$, $\lg x = \frac{7}{5}$

17. $\alpha \neq k \cdot 45^\circ$ i $\alpha \neq 22,5^\circ + k \cdot 45^\circ, k \in \mathbb{C}$

18. $d = 3m$

3.13. Wzory redukcyjne

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
 f) $\sqrt{3}$ g) 1 h) -1 i) $\frac{1}{2}$
- a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
 d) $-\frac{1}{2}$ e) -1 f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 g) $\sqrt{3}$ h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ k) $-\sqrt{3}$ l) $\sqrt{3}$
- a) $-\frac{15}{17}$ b) $\frac{15}{17}$ c) $\frac{8}{17}$ d) $\frac{15}{8}$
- a) $\frac{5}{13}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $-\frac{5}{13}$ d) $\frac{12}{13}$ e) $\frac{5}{12}$
 f) $\frac{12}{5}$
- a) $-\frac{1}{4}$ b) $-1 - 2\sqrt{2}$ c) -1 d) $-\sqrt{3}$
 e) $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\frac{1}{2}$
- a), b), c), d), tak
- $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\lg \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$, $\lg \beta = \frac{\sqrt{14}}{2}$ lub
 $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\lg \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\lg \beta = -\frac{\sqrt{14}}{2}$
- a) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$,
 $\sin 2\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\lg \alpha + \lg \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ lub
 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$, $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\lg \alpha + \lg \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 b) $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$,
 $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\lg \alpha + \lg \alpha = -\frac{8\sqrt{15}}{15}$ lub
 $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
 $\lg \alpha + \lg \alpha = \frac{8\sqrt{15}}{15}$
 c) $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$,
 $\lg \alpha + \lg \alpha = -\frac{25}{12}$
- a) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $-\frac{1}{2}$
 d) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e) -2 f) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
- D

12. A

13. C

14. a) $-\frac{1}{8}$ b) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ c) $-\frac{\sqrt{7}}{21}$

15. Wskazówka do a) Pomnóż i podziel wyrażenie przez $\sin 20^\circ$ i skorzystaj ze wzoru na sinus podwójonego kąta.
 a), b), c) tak d) nie

16. a), b) tak

3.14. Równania trygonometryczne (1)

- a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 g) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 h) $x = \frac{\pi}{3} + 8k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 8k\pi, k \in \mathbb{C}$
 i) $x = -\frac{1}{2} + 4k, x = \frac{1}{2} + 4k, k \in \mathbb{C}$
- a) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = -\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$
- a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
- a) $-\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{2\pi}{9}$
- a) $x = k\pi, k \in \mathbb{C}; 2\pi, 3\pi$
 b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$
 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}; 2\frac{1}{4}\pi, 2\frac{3}{2}\pi$
 c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}; 2\frac{1}{2}\pi$
 d) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}; 2\pi, 2\frac{1}{3}\pi, 2\frac{2}{3}\pi, 3\pi$
 e) $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{C}; 2\pi, 2\frac{1}{8}\pi,$
 $2\frac{3}{8}\pi, 2\frac{5}{8}\pi, 2\frac{7}{8}\pi, 3\pi$

f) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi,$
 $k \in \mathbb{C}; 2\pi$

6. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{k\pi}{4}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{C}$

7. A

8. A

9. C

10. $a \in \langle 1; 9 \rangle, x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{5}{12}\pi$

11. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$
 $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,$
 $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
12. $m = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, \alpha = 2k\pi$ lub
 $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

3.15. Równania trygonometryczne (2)

- a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$
 $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,$
 $k \in \mathbb{C}$
 d) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$
 $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 g) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 h) $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
- a) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = \frac{k\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
- a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{9}$
 d) $\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{9}\pi$
- a) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{C}$

5. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 g) $x = k\pi, k \in \mathbb{C}$
 h) $x = k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
6. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{12}$
7. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{3}\pi + k\pi, x = \frac{2\pi}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{C}$
8. $x = 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
9. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
10. C
11. D
12. B
13. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
14. a) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
15. a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{4\pi}{3}$
16. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
17. a) $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{C}$

Wskazówka. Zapisz równanie w postaci $\sin 2x(1 + 2 \cos x) = \cos x(1 + 2 \cos x)$.

- b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{k\pi}{5}, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
- Wskazówka. Wykorzystaj kolejno wzory na: kwadrat różnicy, sumę i różnicę sinusów, sinus podwojonego kąta, i sprowadź równanie do postaci $2 \sin 2x(\sin 4x + \sin 6x) = 0$.
18. $t \in (-\frac{9}{8}; 2), x = k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
19. a) $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$ b) $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$ c) $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$

3.16. Nierówności trygonometryczne

1. a) $x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 b) $x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 c) $x \in (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
 e) $x \in (\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
 f) $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
2. $a = \frac{11\pi}{6}, b = \frac{13\pi}{6}$
 a) $x \in (\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
 b) $x \in (-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
 c) $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{C}\}$
3. a) $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
 b) $(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$
 d) $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
4. $b = \frac{3\pi}{4}$
 a) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
 b) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
5. a) $x \in (0; \frac{\pi}{12}) \cup (\frac{5\pi}{12}; \pi)$
 b) $x \in (0; \frac{5\pi}{12}) \cup (\frac{7\pi}{12}; \pi)$
 c) $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6})$ d) $x \in (0; \frac{\pi}{2})$
 e) $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ f) $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$
6. a) $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ b) $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{6}; \pi)$ c) $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}; \pi)$

7. $\alpha \in (\frac{2}{3}k\pi; \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi) \cup (\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi), k \in \mathbb{C}$

8. D

9. A

10. C

11. a) $x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 b) $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$ c) $x \in \mathbb{R}$
 d) $x \in (-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbb{C}$
12. a) $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 b) $x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{C}$
 c) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$

13. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$

14. $\alpha \in (\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{C}$

15. a) $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}; \pi)$
 b) $x \in (\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{11\pi}{12}; \pi)$
 c) $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$
 d) $x \in (0; \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8})$

Zestawy powtórzeniowe

1. a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 0 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) 1 h) $\sqrt{3}$
3. a) $\frac{3}{2}$ b) -2 c) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ d) -3 e) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ f) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
4. a) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
 b) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$
 c) $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ d) $-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
5. a) $f(D) = \langle -3; 1 \rangle$, rosnąca
 b) $f(D) = \langle 2; 4 \rangle$, malejąca
 c) $f(D) = \mathbb{R}$, malejąca
 d) $f(D) = (-\infty; 1)$, rosnąca

6. a) $\frac{2}{3}\pi$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2}$

7. a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = -2\sqrt{2}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$
 c) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$
 d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

8. a) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
 b) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{6} - 3\sqrt{10}}{40}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{15\sqrt{6} - 40\sqrt{10}}{40}$

9. a) $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$ d) $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$

10. a) $x = -\frac{\pi}{16} + k\pi, x = \frac{3\pi}{16} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$

11. $\frac{\pi}{3}$

12. a) brak rozwiązań
 b) $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$

d) $x = 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

13. a) tak b) nie

14. a) $x = \frac{2}{3}k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{C}$

15. a) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

16. a) $f(x) = 1 - \cos 2x, D = \mathbb{R}, x \in \langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \rangle$
 b) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, D = \mathbb{R}, x = 0$
 c) $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{2}), D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}, x \in \langle -\frac{3\pi}{8}; 0 \rangle \cup (0; \frac{\pi}{8})$

17. a) $x \in (-\frac{7}{3}\pi; -2\pi) \cup (-\frac{5}{3}\pi; -\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}; 0) \cup (\frac{\pi}{3}; \pi) \cup (\frac{5}{3}\pi; 2\pi) \cup (\frac{7}{3}\pi; 3\pi)$
 b) $x \in \{-\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\} \cup \langle -\frac{11}{6}\pi; -\frac{7}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{13}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi \rangle$
18. a) $a \in \langle 0; 2 \rangle$ b) $a \in \langle -5; \infty \rangle$
 c) $a \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$
19. a) 0 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$ f) $-\frac{1}{2}$
21. a) $x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
22. a) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
23. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2x = \frac{1}{2}$
24. a) $-\frac{24}{25}$ b) $-\frac{7}{5}$ c) $\frac{24}{7}$
25. a) $\sin 3\alpha = \frac{11\sqrt{5}}{25}, \cos 3\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{25}$
 b) $\sin 3\alpha = -\frac{5\sqrt{3}}{9}, \cos 3\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{9}$
26. a) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
27. $\alpha = -\frac{\pi}{2}$
28. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
29. $-\frac{\pi}{2}$
30. a) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
 e) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 f) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$
31. a) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$ b) $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$
32. a) $f(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$,
 wartość najmniejsza: $-\sqrt{2}$,
 wartość największa: $\sqrt{2}$

- b) $f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$,
 wartość najmniejsza: -2 ,
 wartość największa: 2
- c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sin x \geq 0 \\ \cos 2x & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$,
 wartość najmniejsza: -1 ,
 wartość największa: 1
- d) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x + 1 & \text{dla } \tan x > 0 \\ \sin 2x - 1 & \text{dla } \tan x < 0 \end{cases}$,
 wartość najmniejsza: -2 ,
 wartość największa: 2
33. $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$
34. a) $a \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$
 b) $a \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$
35. a) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi; \pi)$
 b) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \pi)$
36. $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{5}{6}\pi; \pi)$
37. $\alpha \in \{-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\}$
38. a) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{dla } \cos x \geq 0 \\ -\sin 2x & \text{dla } \cos x < 0 \end{cases}$
 $a \in \langle -1; 1 \rangle$
 b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x & \text{dla } \tan x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2x & \text{dla } \tan x < 0 \end{cases}$
 $a \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle$
 c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \cos x > 0 \\ -1 & \text{dla } \cos x < 0 \end{cases}$
 $a = -1, a = 1$
39. $x \in \langle 4k\pi; 2\pi + 4k\pi \rangle, k \in \mathbb{C}$
 Wskazówka. Zapisz nierówność
 $\frac{1}{2} \sin 2x \leq 2 \sin \frac{x}{2}$ w postaci
 $\sin \frac{x}{2} (2 \cos^3 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1) \leq 0$.
40. a) $a^2 + ab$ b) $(x+1)^3$
41. a) $\tan(x+y) = \frac{11}{7}, \tan(x-y) = -\frac{13}{16}$
 b) $\tan(x+y) = -\frac{33}{56}, \tan(x-y) = -\frac{63}{16}$
42. b) $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$ d) $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
43. tak
44. a) $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
 d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$
46. $a = -1$

47. $\tan \frac{x}{2} = 2$ lub $\tan \frac{x}{2} = 3$

48. $x = k\pi, k \in \mathbb{C}$

49. a) $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi)$
 b) $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{3}{4}\pi; \pi)$
 c) $x \in (0; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{2}{3}\pi; \pi)$
 d) $x \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$

50. a) $f(D) = \langle -3; \frac{3}{2} \rangle$

Wskazówka. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$ o dziedzinie $D_g = \langle -1; 1 \rangle$.

b) $f(D) = \langle 1; 11 \rangle$

51. a) $x \in \langle 0; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi \rangle \cup (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$
 b) $x \in \{\frac{\pi}{2}\} \cup \langle \pi; \frac{11}{6}\pi \rangle$

52. a) $x \in \{\frac{\pi}{2}\} \cup \langle \frac{3}{2}\pi; 5 \rangle \cup (5; 6)$
 b) $x \in (\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi)$

53. Wskazówka. Po zastosowaniu wzorów na tangens różnicy kątów i tangens podwojonego kąta równanie można zapisać w postaci: $\tan^2 x = 9$.
 $\cos 2x = -0,8$

55. a) $a = \sin 4, b = \sin 3, c = \sin 1, d = \sin 2$

56. Wskazówka. $f(x) = |\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})|$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{C}\}$

57. a) $m \in (-\infty; 1) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 b) $m \in \langle \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \rangle$

58. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$

59. a) $x = \cos^2 \alpha + \sin \alpha, y = \cos \alpha (1 - \sin \alpha)$
 b) $f(\alpha) = \cos^2 \alpha + 1, f(D) = \langle 1; 2 \rangle$

4.1. Pojęcie ciągu

1. a) 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96
 b) 2, 4, 8, 16, 32, 64
 c) 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1
 d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120

2. a) np. 2, 5, 7, 12, 19, 31
 b) np. 2, 5, 10, 50, 500, 25 000

4. B

5. B

6. D

7. a) 3, 27, 351, 153, 153
 b) 18, 513, 153, 153, 153
 c) 24, 72, 351, 153, 153

8. 63

9. a) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \geq 4 \\ 1 & \text{dla } n = 3 \\ 2 & \text{dla } n \in \{1, 2\} \end{cases}$
 b) $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$ dla $n \geq 3$

4.2. Sposoby określania ciągu

1. a) 1, 3, 6, 10, 15, 21
 b) 1, 2, 6, 24, 120, 720

2. a) 7, 9, 11, 13, 15
 b) 3, 10, 21, 36, 55

- c) 0, 6, 24, 60, 120
 d) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$
 e) $-2, 4, -8, 16, -32$
 f) $0, 2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 4\frac{1}{4}, 4\frac{4}{5}$
 g) $2, 2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}$
 h) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0$
 i) 1, 0, 1, 0, 1

3. a) np. $a_n = 11n, a_8 = 88$
 b) np. $a_n = 5 \cdot (-1)^n, a_8 = 5$
 c) np. $a_n = n^3, a_8 = 512$
 d) np. $a_n = 5n - 4, a_8 = 36$
 e) np. $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, a_8 = \frac{15}{17}$
 f) np. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}$
 g) np. $a_n = \frac{10^n-1}{9}, a_8 = 11\,111\,111$
 h) np. $a_n = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + \dots + (n-1) \cdot 10^{n-2} + n \cdot 10^{n-1}$,
 $a_8 = 87\,654\,321$

4. a) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_5 = 5, a_7 = 7$
 b) $a_3 = 8, a_4 = 8, a_5 = 64, a_6 = 24$,
 $a_7 = 216$

5. a_2, a_5

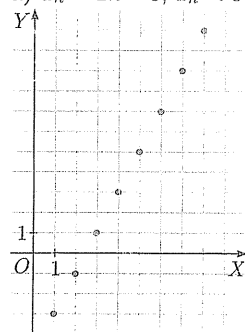
6. a) $n \in \{2, 3, \dots, 8\}$
 b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

7. a) $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$
 b) $n \in \{1, 2\} \cup \{6, 7, 8, \dots\}$

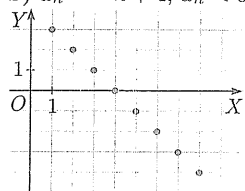
- e) 4, 2, 0, -2; $a_{10} = -14$, $a_{20} = -34$
 f) $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$; $a_{10} = 12\sqrt{2}$,
 $a_{20} = 22\sqrt{2}$
2. a) 66 b) -7 c) $13\sqrt{5}$
3. a) $r = 1$, $a_n = n + 3$
 b) $r = 6$, $a_n = 6n - 9$
 c) $r = -\frac{1}{4}$, $a_n = -\frac{1}{4}n + 5\frac{1}{4}$
 d) $r = 5$, $a_n = 5n - 14$
4. a) $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$
 b) $a_1 = 12$, $a_n = 15 - 3n$
 c) $a_1 = -7$, $a_n = \frac{1}{2}n - 7\frac{1}{2}$
 d) $a_1 = 1 + \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{3}n + 1$
5. a) $a_n = 3n - 4$, $a_5 = 14$
 b) $a_n = 20 - 4n$, $a_6 = -4$
 c) $a_n = \frac{1}{2}n - 6$, $a_6 = -3$
6. a) $x = 7$, $y = 11$
 b) $x = 15,5$, $y = 27$, $z = 38,5$
7. a) $a_1 = -2$, $r = 5$
 b) $a_1 = 3,5$, $r = -0,5$
 c) $a_1 = \frac{5}{2}$, $r = -\frac{3}{2}$ lub $a_1 = -1$, $r = 2$
8. a) $x = 1 - \sqrt{3}$ lub $x = 1 + \sqrt{3}$ b) $x = 10$
9. szesnasty
10. a) $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1 b) -6, -5, -4, -3
11. B
12. C
13. C
14. $a_1 = -2$, 15 wyrazów
15. 2, 4, 6 lub 6, 4, 2
16. a) -5, -3, -1, 1 lub -1, 1, 3, 5 lub
 $-3 - \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$, $3 - \sqrt{6}$ lub
 $\sqrt{6} - 3$, $\sqrt{6} - 1$, $\sqrt{6} + 1$, $\sqrt{6} + 3$
 b) 6, -2, -10, -18
17. $x = 4$ cm, $y = 6$ cm, $z = 8$ cm
18. 108 m²
19. $\frac{3}{4}p$, p , $\frac{5}{4}p$
20. 2 m, 4 m, 6 m
21. 5 dni

4.7. Ciąg arytmetyczny (2)

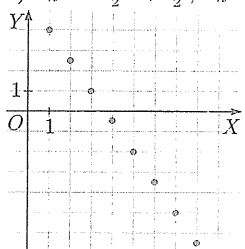
1. a), c) rosnący b), d) malejący
2. a), c), e), f) nie b), d) tak
3. a) $a_n = 5n - 4$; 1, 6, 11, 16
 b) $a_n = -3n + 1$; -2, -5, -8, -11
 c) $a_n = an + b$; $a + b$, $2a + b$, $3a + b$,
 $4a + b$
4. a) $a_n = 2n - 5$; $a_n < 0$ dla $n \in \{1, 2\}$



- b) $a_n = -n + 4$, $a_n < 0$ dla $n \geq 5$



- c) $a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{11}{2}$; $a_n < 0$ dla $n \geq 4$



5. a) $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$
 b) $n \in \{3, 4, 5\}$
 c) $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$
6. C
7. C

8. C

9. D

10. $11; y = 4x - 9$

11. a) $b_n = 11 - 4n$ b) $b_n = 9 - 4n$

12. a) tak, $b_1 = a_2$, $r' = 2r$

b) tak, $b_1 = a_1 + 1$, $r' = 2r + 1$

c) tak, $b_1 = 5r(2a_1 + r)$, $r' = 10r^2$

14. a) $k \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$

b) $k \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1)$

c) $k = -1$

15. $a_n = 3n - 8$, $a_{10} = 22$

16. $P_n = \pi(2n + 2x - 1)$; $x = 3$

18. b) 135, 210, 345, 420, 555, 630, 765, 840,
 975

4.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

1. a) $S_9 = 81$, $S_{18} = 324$

b) $S_9 = -63$, $S_{18} = -369$

c) $S_9 = 49,5$, $S_{18} = 220,5$

2. a) 115 b) -185 c) 10,5 d) $10 + 35\sqrt{2}$

3. a) 11 wyrazów, $S_{11} = 209$

b) 20 wyrazów, $S_{20} = -440$

c) 15 wyrazów, $S_{15} = 75$

d) 18 wyrazów, $S_{18} = 0$

4. a) 9900 b) 255 000 c) 2430

5. a) 1225 b) 1650

6. 1980

7. a) 4400 b) 19 000 c) 4095

8. a) $a_n = \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$, $S_5 + S_{10} = 82,5$

b) $a_n = -1$, $S_5 + S_{10} = -15$ lub

$a_n = \frac{6}{5}n - \frac{17}{5}$, $S_5 + S_{10} = 33$

c) $a_n = 2n - 4$, $S_5 + S_{10} = 80$ lub

$a_n = 4 - 2n$, $S_5 + S_{10} = -80$

9. a) $n = 4$ b) $n = 7$ c) $n = 11$

10. a), d) tak b), c) nie

11. B

12. C

13. A

14. C

15. a) $x = 34$ b) $x = -3$ c) $x = -4$

16. a) $a_n = \frac{2n(n+1)}{n+2}$, rosnący

b) $a_n = 3 + \frac{3}{n}$, malejący

c) $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$, rosnący

17. 40

18. co najmniej 8

19. a) $n = 4$ lub $n = 9$ b) $n = 10$

20. $15a$

21. $a_n = 3n - 2$, $b_n = 2n - 1$

4.9. Ciąg geometryczny (1)

1. a) $a_n = 2^{2n-3}$, $a_5 = 128$

b) $a_n = 5 \cdot 0,1^{n-1}$, $a_5 = 0,0005$

c) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $a_5 = 1\frac{7}{9}$

d) $a_n = 16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, $a_5 = 5\frac{1}{16}$

e) $a_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$, $a_5 = 5$

f) $a_n = (-\sqrt{3})^n$, $a_5 = -9\sqrt{3}$

2. a) $a_2 = 18$, $a_3 = 12$, $a_4 = 8$, $a_6 = 3\frac{5}{9}$

b) $a_2 = -9$, $a_3 = 9$, $a_4 = -9$, $a_6 = -9$

c) $a_2 = 2 - \sqrt{2}$, $a_3 = 2\sqrt{2} - 2$,

$a_4 = 4 - 2\sqrt{2}$, $a_6 = 8 - 4\sqrt{2}$

3. a) $a_6 = 125$ b) $a_5 = 2\frac{1}{40}$ c) $a_4 = -\frac{1}{18}$

d) $a_{14} = -13$ e) $a_9 = \frac{1}{8}$ f) $a_{10} = 9\sqrt{3}$

4. a) $a_1 = -108$ b) $a_1 = -3$

c) $a_1 = 1562,5$

5. a) $q = \frac{1}{2}$ b) $q = -\sqrt{2}$ lub $q = \sqrt{2}$

c) $q = \sqrt{3}$

6. a) $a_n = 2^{3-n}$ b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

c) $a_n = 6 \cdot (-1)^n$ d) $a_n = 3 \cdot 10^{n-3}$

e) $a_n = 2 \cdot 5^{4-n}$ lub $a_n = 2 \cdot (-5)^{4-n}$

f) $a_n = \frac{1}{25} \cdot (\sqrt{5})^n$ lub

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{25} \cdot (\sqrt{5})^n$

7. a) $x = -30$ lub $x = 30$

b) $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$

8. a) $2\sqrt{2}$, 8, $16\sqrt{2}$ lub $-2\sqrt{2}$, 8, $-16\sqrt{2}$

b) 18, 12, 8 lub -18, 12, -8

c) $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$ lub $-\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $-3\sqrt{6}$

9. $a_1 = \frac{1}{5}, q = 5$

10. $a_n = -\frac{1}{8} \cdot 3^{5-n}$ lub $a_n = \frac{1}{8} \cdot 3^{n-1}$

11. siódmy

12. B

13. B

14. B

15. C

16. 10 zł, 20 zł, 40 zł

17. a) $14\frac{1}{4}$ b) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ lub $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

18. a) 1 m b) $\frac{14\sqrt{19}}{5}$ m lub $2\sqrt{55}$ m

19. 9

4.10. Ciąg geometryczny (2)

1. a) malejący b), e), f) rosnący
c), d) niemonotoniczny

2. a), b), d), f) nie c), e) tak

3. a) $a_n = \frac{(\sqrt{3})^n}{6}$ lub $a_n = -\frac{(\sqrt{3})^n}{6}$
b) $a_n = 5^{n-1}$

c) $a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$ lub
 $a_n = -\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$

4. a) $x = -\frac{1}{5}$ b) $x = 0$ lub $x = 2$
c) $x = 0$ lub $x = 2$

5. $q = -3$ lub $q = -\frac{1}{3}$

6. $a_1 = 1215, q = \frac{1}{3}$ lub $a_1 = \frac{5}{3^8}, q = 3$

7. 5, -10, 20 lub 20, -10, 5;
oba ciągi niemonotoniczne

8. a) 32, 16, 8, 4 b) 8, 4, 2, 1

9. $a_n = 2^{n-1}$ lub $a_n = 2^{3-n}$

10. 27

11. a) nie b) tak

12. D

13. D

14. A

15. B

18. a) $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1} - 1$

19. $a_n = 3 \cdot 2^{\frac{5-n}{2}}$

4.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

1. a) 189 b) 15,75 c) -182

2. a) -255 b) $2\frac{87}{72}$ c) $93(1 - \sqrt{2})$ d) 100

3. a) 2 b) 48 c) $1 + \sqrt{2}$ d) 9

a_1	q	n	a_n	S_n
4	2	8	512	1020
27	$\frac{2}{3}$	4	8	65
100	0,1	5	0,01	111,11
$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	7	$27\sqrt{3}$	$40\sqrt{3} - 39$

5. a) 0 b) x c) 0 d) x

6. a) $a_n = 5 \cdot 2^{3-n}$

b) $a_n = -(-3)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}$

7. a) 7 b) 4

8. 5

9. $S_7 = 381$ lub $S_7 = 728\frac{2}{3}$

10. $q = -2, a_1 = 3$

11. D

12. C

13. B

14. $9(\sqrt{3} - 1)$

15. 8

16. $q = 2, a_1 = 1$

18. $23\frac{5}{8}$

19. b) $(\frac{a}{b})^{\frac{n}{2}}$

4.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne - zadania

1. $a_n = 2n - 4$

2. a) 0,8 b) $25 \cdot (\frac{5}{4})^6$

3. a) 11, 5, -1 lub 2, 5, 8
b) -6, 6, 18 lub 10, 6, 2

4. -2, 4, -8 lub -8, 4, -2

5. a) 8, 12 lub $\frac{1}{2}, -3$ b) 3, 9 lub $\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}, 2$

6. 6, 18 lub -5, $12\frac{1}{2}$

7. a) 200 b) 48

8. C

9. D

10. D

11. 1, 3, 5 lub $2 - 2\sqrt{2}, 3, 4 + 2\sqrt{2}$ lub
 $2 + 2\sqrt{2}, 3, 4 - 2\sqrt{2}$

12. 1, 2, 4

13. $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{9}{16}, \frac{15}{16}$ lub $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$

14. $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, a_1 < 0$

15. $q = -2$ lub $q = 1$

16. $x = -4, y = -2$ lub $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ lub
 $x = y = 0$

17. a) $A_5(7, 128)$ b) $|A_3A_4| = 2\sqrt{145}$

18. 4, 8, 16, 32

4.13. Procent składany

1. a) 5304,50 zł b) 5512,50 zł

c) 6083,26 zł d) 7346,64 zł

e) 8144,47 zł f) 16035,68 zł

2. a) 12836,27 zł b) 12775,15 zł

c) 13272,12 zł

3. a) 2762,82 zł, zmniejszyłaby się
o 596,29 zł

b) 6288,95 zł, zmniejszyłaby się
o 1486,51 zł

4. a) 500 zł b) 2000 zł

5. 6000 zł

6. a) 6333,85 zł b) 6344,93 zł

c) 6352,45 zł d) 6356,12 zł

7. a) 2748,97 zł b) 2726,61 zł

8. 4,6%

9. 15 590,24 zł; o 2775,91 zł

10. C

11. C

12. A

13. a) 29 400zł

b) **Wskazówka.** Zauważ, że odsetki
w k -tej racie wynoszą:

$$I_k = rK(1 - \frac{k-1}{n}).$$

14. nie

15. 62,89%, 49 075,38 zł

16. a) 452,56 zł b) 463,71 zł

17. po 8 latach: 4791,40 zł,
po 20 latach: 15 484,60 zł

18. a) 143 183,39 zł b) 200 144,82 zł
c) 228 151,10 zł

19. 14 761,34 zł

20. 44 518,22 zł, 81 108,96 zł

21. 8024,26 zł

4.14. Granica ciągu

1. a) 0 b) 0 c) 3 d) -2 e) 3 f) -4

2. a) 0 b) 5 c) -2 d) 4 e) 1 f) 0

3. a) a_1, a_2 b) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
c) $a_1, a_2, \dots, a_{29}$ d) $a_1, a_2, \dots, a_{299}$

4. a) 9 b) 39 c) 19

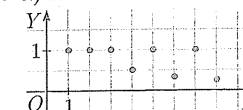
5. a) -3 b) 2 c) 1 d) 5

6. D

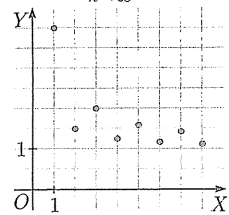
7. C

8. C

9. a) nie



b) tak, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$



10. a) $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 3$; nie
b) $a_{2n-1} = -\frac{2n+2}{2n-1}, a_{2n} = \frac{2n+3}{2n}$; nie
c) $a_{2n-1} = -1, a_{2n} = 1$; nie
11. a) $n > 5$ b) $n > 90\,000$ c) $n > 10$
d) $n > 99$
12. $n \geq 250$
13. a) $n \geq 23$
b) $n \geq 317$
14. a) np. $a_n = 6 - \frac{1}{n}$ b) np. $a_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n}$
c) np. $a_n = \pi + \frac{(-1)^n}{n}$

4.15. Granica niewłaściwa

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$
2. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) $-\infty$ e) $-\infty$
f) ∞
3. a) ∞ b) $-\infty$ c) $-\infty$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nie istnieje
4. C
5. D
6. C
7. a) nie b) tak
8. a) $n \geq 252, n \geq 502$
b) $n \geq 78, n \geq 105$
c) $n \geq 5, n \geq 6$
d) $n \geq 11, n \geq 12$

4.16. Obliczanie granic ciągów (1)

1. a) -1 b) 2 c) $2\frac{1}{2}$ d) 2 e) -7
f) $-1\frac{1}{3}$ g) $-2\frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{3}$ i) $-1\frac{1}{3}$

2. a) 0 b) 5 c) 0
3. a) 4 b) $1\frac{1}{2}$ c) 25 d) $\frac{1}{4}$
4. a) $-\frac{1}{2}$ b) 4 c) $-\frac{1}{2}$ d) $1\frac{1}{4}$ e) 8 f) 3
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
6. a), b), c), e), f) tak d) nie
7. D
8. A
9. D
10. D
11. a) 8 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) 1 f) 0
12. a) 1 b) 1
13. a) 1 b) -2 c) ∞ d) 0
14. $\frac{1}{2}$

4.17. Obliczanie granic ciągów (2)

1. a) $-\infty$ b) ∞ c) $-\infty$ d) ∞ e) $-\infty$
f) ∞
2. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞
3. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) ∞ e) $-\infty$
f) ∞ g) ∞ h) $-\infty$ i) $-\infty$
4. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty;$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty;$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$
5. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty;$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty;$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$
6. a) 0 b) ∞ c) $\frac{1}{2}$ d) ∞
7. C
8. A
9. D
10. a) $-\infty$ b) ∞
11. a) ∞ b) $-\infty$
12. a) $k = 1$ b) $k \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
c) $k \geq 3$
13. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{10}$

14. a) 0 b) 0 c) 0

15. a) 5 b) 7

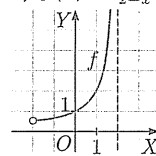
16. a) 8 b) 8 c) 2 d) 1

17. b) $1\frac{1}{2}$

18. $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$

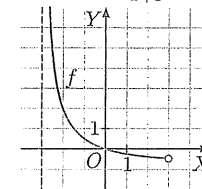
4.18. Szereg geometryczny

1. a) $S_n = \frac{5}{4} (1 - (\frac{1}{5})^n); S = \frac{5}{4}$
b) $S_n = \frac{3}{4} (1 - (-\frac{1}{3})^n); S = \frac{3}{4}$
2. a) 20 b) -27 c) 6 d) -80 e) $2 + \sqrt{2}$
f) $3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
3. a) 24 b) $-41\frac{2}{3}$ c) $16\frac{1}{5}$ d) $4\frac{4}{9}$
e) $\frac{5}{4} (1 - \sqrt{5})$ f) $0,64$
4. a) rozbieżny b) $\frac{\pi+3}{4-\pi}$ c) $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$
5. a) $q = \frac{2}{3}$ b) $a_1 = -1,9$ c) $q = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
d) $a_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ e) $a_1 = 1 - k^2$ f) $q = \frac{1}{2}$
6. a) $a_1 = 48, q = -\frac{1}{2}$ lub $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$
b) $a_1 = 18, q = \frac{1}{3}$ lub $a_1 = 9, q = \frac{2}{3}$
7. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $2\frac{41}{90}$ e) $\frac{50}{99}$
f) $1\frac{116}{495}$ g) $-1\frac{1}{37}$ h) $-2\frac{55}{101}$
8. a) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ b) $x \in (3\frac{1}{2}; \infty)$
9. B
10. D
11. D
12. a) $x = 3$ b) $x = -3$ lub $x = 4$ c) $x = 2$
d) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$
13. a) $x \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ b) Nie ma takiego x .
c) $x \in (-1; -\frac{2\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1)$
14. a) $f(x) = \frac{2}{2-x}, D = (-2; 2)$



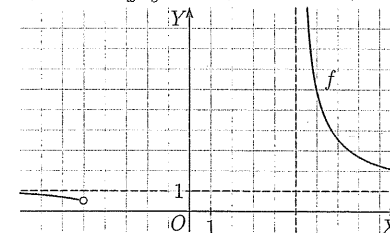
$f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 2)$

b) $f(x) = \frac{-x}{x+3}, D = (-3; 3)$



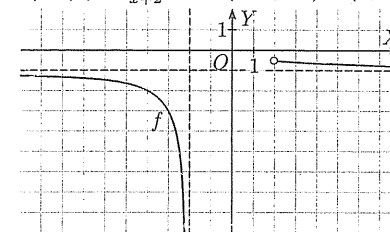
$f(x) > 0$ dla $x \in (-3; 0)$

c) $f(x) = \frac{x}{x-5}, D = (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$



$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$

d) $f(x) = \frac{-x}{x+2}, D = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$



Funkcja f nie przyjmuje wartości dodatnich.

15. a) $a_1 = -6, q = -\frac{1}{2}$ b) 192
16. $1\frac{1}{7}$
17. a) $1, 1, -1, -1, 1, 1$ b) $\frac{2}{5}$

Zestawy powtórzeniowe

1. a) tak, $a_n > 0$ dla $n \geq 3$
b) nie, $a_n > 0$ dla $n \in \{3, 4, 5\}$
c) tak, $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
2. a) $a_n = 4n - 7$, rosnący
b) $a_n = 10 - 3n$, malejący
c) $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(10 - n)$, malejący
3. a) $27\frac{1}{2}$ b) -15 c) $\sqrt{5}$
4. a) 160 b) -160 lub -80 c) 64

5. a) -24 b) 88 c) -12 d) 24p

6. $a_n = \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}$, $S_{20} = 75$ lub
 $a_n = -\frac{1}{2}n + 1\frac{1}{2}$, $S_{20} = -75$

7. a) 20 b) $27\frac{1}{2}$

8. $N = 6$, $S_6 = 60$

9. a) $x = -17$ b) $x = 30$
c) $x = -1$ lub $x = 15$ d) $x = -6,5$

10. 8 boków

11. a) tak b) tak c) tak

12. a) $a_n = -5^{n-3}$, malejący
b) $a_n = 2^{\frac{5-n}{2}}$, malejący lub
 $a_n = 4 \cdot (-2)^{\frac{1-n}{2}}$, niemonotoniczny
c) $a_n = 5^{3-n}$, malejący

13. a) $a_2 = 3$, $a_5 = 81$ lub $a_2 = -3\frac{3}{13}$,
 $a_5 = 87\frac{3}{13}$
b) $a_2 = 1$, $a_5 = 8$ c) $a_2 = 2$, $a_5 = -16$

14. a) $10\frac{3}{4}$ b) $30 + 14\sqrt{2}$ c) $13\sqrt{3} - 40$

15. a) $31\frac{1}{2}$ lub $-204\frac{3}{4}$ b) $3\frac{15}{16}$ c) 0

16. $\frac{1}{9}$

17. 3

18. $a_n = 2^{n-1}$ lub $a_n = 3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

19. a) tak b) tak

20. około 4,08%

21. a) około 16 766 zł b) około 2171 zł

22. a) $a_n = -5n + 15$, $S_{10} = -125$
b) $a_n = 2\sqrt{3}n - 3\sqrt{3} + 1$,
 $S_{10} = 10(1 + 8\sqrt{3})$

23. a) malejący, $S = 16$
b) rosnący, $S = -5$

24. a) malejący b) rosnący
c) niemonotoniczny

27. 924

29. 755

30. $x = -1$, $y = -6$ lub $x = -25$, $y = -54$

31. a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $-\infty$ d) $-\frac{1}{2}$ e) ∞ f) 0

32. a) 0 b) ∞

33. a) $p = \frac{1}{8}$ b) $p = -1$

34. a) $4 + 2\sqrt{3}$ b) $\frac{12\sqrt{5}+26}{11}$

35. a) $\frac{5}{9}$ b) $1\frac{4}{11}$ c) $2\frac{1}{22}$ d) $4\frac{7}{111}$

36. a) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{4}; \infty)$
b) $x \in (2 - \sqrt{10}; 2(1 - \sqrt{2})) \cup$
 $\cup (2(1 + \sqrt{2}); 2 + \sqrt{10})$
c) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{C}$

37. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{x-1}$

b) $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{C}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\cos x}$

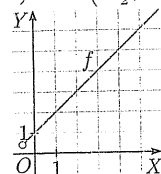
38. a) $x \in (-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $S = \frac{4}{6-9x}$,

$S = 2$ dla $x = \frac{4}{9}$

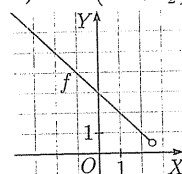
b) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$, $S = \frac{2x^3}{2x+1}$,
 $S = 2$ dla $x \in \{-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

40. $x = -3$

41. a) $D = (-\frac{1}{2}; \infty)$, $f(x) = x + 1$



b) $D = (-\infty; 2\frac{1}{2})$, $f(x) = 3 - x$



42. rosnący, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

43. rosnący

44. a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{45}{62}$

45. $a_n = 27 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$, $S = 81$ lub
 $a_n = 27 \cdot (-\frac{1}{6})^{n-1}$, $S = 23\frac{1}{7}$

46. b) $a_6 = -2$

47. $a(\sqrt{2} + 1)$

48. a) nie, $833\frac{1}{7} \text{ cm}^3$ b) 7

49. 2

50. a) $\frac{n^2+n-2}{n}$, $S_n = \frac{2n^2+n-3}{2}$ b) 5

51. $m = 2$

53. $A = -3$, $B = -12$

54. 1

55. -1, 2, -4 lub -4, 2, -1

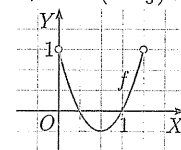
56. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, rosnący

57. a) rozbieżny

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

c) rozbieżny

58. a) $D = (0; 1\frac{1}{3})$; $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ b)



59. a) $x = 3 + 2\sqrt{3}$ b) $x \in (0; 11 + 8\sqrt{2})$

60. $m \in (1; 1\frac{1}{2})$

61. $b = 0,09a^2$, $a < 0$

63. a) 4951

66. $a_n = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n - 5}{9}$, $b_n = \frac{10^n + 2}{3}$

5.1. Granica funkcji w punkcie

1. a) 5 b) 0 c) 1 d) 2

2. a) 0 b) -1

3. a) nie b) nie c) nie d) tak

4. a) -2, -1, 0 b) -2, 0, 2

5. a) $a = 4$ b) $a \in \mathbb{R}$

6. D

7. B

8. D

10. a) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 6$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 1$

11. a) $m = 4$ b) $m = 1$

5.2. Obliczanie granic

1. a) 8 b) 1 c) -4

2. a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\frac{5}{3}$ c) -10

3. a) $-\frac{2}{3}$ b) 0 c) 1

4. a) $\frac{2}{5}$ b) -9 c) 0 d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{13}{3}$ f) 32
g) $\frac{25}{3}$ h) $\frac{3}{5}$ i) $-\frac{3}{2}$

5. a) 8 b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{8}$

6. a) $a = 4$

b) $a = \sqrt{2} - 1$ lub $a = -\sqrt{2} - 1$

c) $a = -2$

7. a) $x_0 = 3$ b) $x_0 = 2$ lub $x_0 = 3$

c) $x_0 = -4$ lub $x_0 = 4$

8. D

9. A

10. A

11. a) $\frac{2}{3}$ b) 3 c) $\frac{1}{120}$

12. a) tak b) tak c) tak

13. $a \in (\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}+1}{2})$

14. a) 2 b) $\frac{1}{2}$

5.3. Granice jednostronne

1. a) 5 b) 3 c) 2 d) 2

2. a) 1, 2, nie b) 4, 2, nie c) 1, 1, tak
d) 0, 0, tak

3. Aby wykazać, że nie ma granicy funkcji f w punkcie x_0 , należy zauważyć, że granice jednostronne w tym punkcie są różne.

Wskazówka do b) $f(x) = \frac{1-x}{x-1}$

4. a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 0 d) -1 e) $-\frac{1}{8}$ f) -1

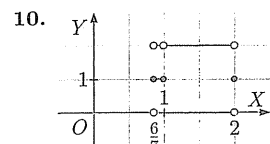
5. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $1 \neq 0$
b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$,
 $-3 \neq 3$

6. B

7. D

8. B

9. a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$



a) 2 b) 0 c) 2 d) 0

11. np. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq 2 \\ 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

12. a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x+1) - g(x-1)) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x+1) - g(x-1)) = 1$

b) tak

5.4. Granice niewłaściwe

1. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞

2. a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$

3. a) nie b) tak c) nie

4. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) $-\infty$ e) ∞ f) ∞

5. a) nie b) tak c) nie

6. a) $x = -7$ b) $x = -3$ c) $x = -4$

7. a) $x = -2$, $x = 2$ b) $x = 1$

c) $x = -2$, $x = 0$ d) $x = -2$, $x = 2$

e) $x = 1$ f) $x = -4$

8. D

9. A

10. D

11. b) 1, ∞ , 0

12. $a + b \neq -2$

13. a) $x = 1$ b) brak asymptoty c) $x = 2$

14. a) $x = -1$, $x = 2$ b) $x = -1$, $x = 2$

c) $x = -1$, $x = 1$

5.5. Granica funkcji w nieskończoności

1. a) ∞ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) ∞ e) ∞

f) $-\infty$

2. a) $\frac{2}{3}$ b) 4 c) -1 d) $-\frac{1}{5}$ e) 3 f) 0

g) ∞ h) $-\infty$ i) ∞

3. $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$

4. kolejno: stopień licznika, stopień mianownika, granica w ∞ , granica w $-\infty$

a) 2, 2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ b) 2, 3, 0, 0

c) 4, 3, ∞ , $-\infty$

5. a) 0 b) 0 c) 0 d) ∞ e) 0 f) $-\frac{5}{2}$

g) 2 h) ∞ i) 0

6. a) $y = 0$ w $\pm\infty$ b) $y = 0$ w $\pm\infty$

c) $y = \frac{2}{3}$ w $\pm\infty$ d) $y = -5$ w $\pm\infty$

e) $y = 0$ w $\pm\infty$ f) $y = -\frac{1}{2}$ w $\pm\infty$

7. a) $y = 3$ w $\pm\infty$, $x = -1$ - obustronna

b) $y = -4$ w $\pm\infty$, $x = 2$ - obustronna

c) $y = 0$ w $\pm\infty$, $x = -1$ - obustronna, $x = 1$ - obustronna

d) $y = 0$ w $\pm\infty$, $x = -3$ - obustronna

e) $y = 1$ w $\pm\infty$, $x = -1$ - obustronna

f) $y = 0$ w $\pm\infty$, $x = -3$ - obustronna, $x = 1$ - obustronna

8. A

9. C

10. C

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{2}{3}$

12. $a = -\frac{7}{3}$ lub $a = 1$ lub $a = 2$

13. a) $D = \langle 2; \infty \rangle$, $y = 1$ w ∞ , brak asymptot pionowych

b) $D = (5; \infty)$, $y = 2$ w ∞ ,

$x = 5$ - prawostronna

c) $D = \langle -2; 2 \rangle$,

brak asymptot poziomych,

$x = 2$ - lewostronna

14. $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$ lub $a = 0$, $b = 2$

15. a) $y = -7$ w ∞ , $y = -2$ w $-\infty$

b) $y = 2$ w $-\infty$, $y = 3$ w ∞

c) $y = -3$ w $\pm\infty$

5.6. Ciągłość funkcji

1. a) Ma granicę i nie jest ciągła.

b) Nie ma granicy i nie jest ciągła.

c) Ma granicę, nie rozpatrujemy ciągłości w punkcie, który nie należy do dziedziny.

d) Ma granicę i jest ciągła.

3. a) nieciągła b) ciągła

4. a) nie b) tak c) tak d) nie

5. a) nieciągła, -2 b) nieciągła, 7

c) ciągła d) nieciągła, -1 , 1

6. a) $a = -\sqrt{11}$, $a = \sqrt{11}$

b) Nie ma takiego a . c) $a = -1$, $a = 0$

d) $a = 2$

7. A

8. A

9. D

10. a) $a = 3$, $b = \frac{4}{5}$, $c = -\frac{1}{10}$

b) $a = -1$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2$

11. $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

12. $f(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m < -11 \\ 1 & \text{dla } m = -11, \\ 2 & \text{dla } m > -11 \end{cases}$

funkcja f jest nieciągła, ma jeden punkt nieciągłości $m_0 = -11$.

13. $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, ciągła

14. $P(a) = \begin{cases} 8a & \text{dla } 0 < a \leq 1 \\ \frac{16a-8}{a} & \text{dla } a > 1 \end{cases}$, ciągła

5.7. Własności funkcji ciągłych

1. Wskazówka do a): $f(x) = 2x^3 + 4x - 5$; $f(0) = -5 < 0$, $f(1) = 1 > 0$

2. a) jedno rozwiązanie w przedziale $(1; 2)$

b) dwa rozwiązania: w przedziale

$(-2; -1)$ i w przedziale $(1; 2)$

c) jedno rozwiązanie w przedziale $(\frac{\pi}{2}; \pi)$

3. $(-0,5; -0,4)$

4. a) $(0,5; 1)$ b) $(0,5; 0,75)$

5. a) $f(2) = 2$; można

b) $f(-1) = f(1) = 3$; można

c) Nie przyjmuje; nie można, f nie jest ciągła.

d) Nie przyjmuje; nie można, dziedzina funkcji f nie jest przedziałem domkniętym.

e) Nie przyjmuje; nie można, dziedzina funkcji f nie jest przedziałem domkniętym.

f) $f(2) = -2$; nie można, f nie jest ciągła oraz jej dziedzina nie jest przedziałem domkniętym.

6. a) $f(0) = f(2) = 1$; można

b) Nie przyjmuje; nie można, f nie jest ciągła.

c) Nie przyjmuje; nie można, dziedzina f nie jest przedziałem domkniętym.

d) $f(4) = 2$; można

7. B

8. C

9. Nie można zastosować twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich, gdyż funkcja f nie jest określona w całym przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.

10. x - długość sznurka, $P(x)$ - pole części trawnika, z której koza może zjeść trawę; $P(2\sqrt{3}) = 2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 8,88 < 10,5$, $P(3\sqrt{2}) = \frac{9}{4}\pi + \frac{9}{2} \approx 11,57 > 10,5$

11. a) $m = -4$, $M = 8$ b) $m = -3$, $M = 9$

c) $m = 0$, $M = 8$ d) $m = 0$, $M = 5$

12. a) $k = 2 + \sqrt{2}$ b) $k = -\frac{4}{3}$ lub $k = 0$

13. $m = 1$, f nie przyjmuje największej wartości

5.8. Pochodna funkcji

1. a) 1 b) 1 c) 4 d) -1

2. a) -5 b) $-1,5$

3. a) 1 b) -1 c) -1

4. a) $4x + 8$ b) $x^2 + x - 1$

5. a) -2 b) 4 c) 0 d) $-\frac{1}{16}$

6. $f'(2) = 0$, $f'(4) = 4$, $f'(-1) = -6$

7. a) $1, 45^\circ$ b) $-1, 135^\circ$

c) $-2, 117^\circ$ d) $-\frac{1}{4}, 166^\circ$

8. B

9. D

10. C

11. $h = 0,1$

12. $m = -\frac{1}{2}$

13. a) nie b) tak, $f'(2) = 0$

14. $x_0 = -1, x_1 \neq 1$

5.9. Funkcja pochodna

1. a) $f'(x) = 3$ b) $f'(x) = a$

2. a) $f'(x) = 2x - 4$ b) $f'(x) = -2x + 4$
c) $f'(x) = -3x^2$

3. a) $f'(x) = 2x, f'(-3) = -6$
b) $f'(x) = 3x^2, f'(2) = 12$
c) $f'(x) = 4x^3, f'(0) = 0$
d) $f'(x) = 5x^4, f'(-1) = 5$
e) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(-2) = -\frac{1}{4}$
f) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}, f'(1) = -2$

4. a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{4}x + 1$
c) $y = -8x - 16$ d) $y = 8x - 16$
e) $y = 3x + 2$ f) $y = 12x - 16$

5. a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ b) $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}), (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$
c) $(1, 1)$

6. a) $y = 12x - 36$
b) $y = 12x + 16; y = 12x - 16$
c) Nie ma takich stycznych.

7. a) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$
b) Nie ma takich stycznych.
c) $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}, y = -\frac{1}{2}x - \sqrt{2}$

8. a) Nie ma takich stycznych.
b) $y = -x - 2, y = -x + 2$

9. A

10. A

11. $x_1 = -2, x_2 = 1$

12. $f - \text{III}, g - \text{I}, h - \text{II}$

13. $\frac{4}{3}$

14. $a = \frac{1}{4}$

5.10. Działania na pochodnych

1. a) $f'(x) = \frac{2}{5}x, f'(0) = 0, f'(1) = \frac{2}{5}$
b) $f'(x) = 2x^2 + 3, f'(0) = 3, f'(1) = 5$
c) $f'(x) = 15x^2 - 4x + 7, f'(0) = 7, f'(1) = 18$
d) $f'(x) = x^3 + 4x, f'(0) = 0, f'(1) = 5$

2. a) $f'(x) = 18x^2 - 10x - 4$
b) $f'(x) = -8x^3 + 27x^2 - 20x - 12$

3. a) $f'(x) = 24x + 22$
b) $f'(x) = -15x^2 + 14x + 6$
c) $f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 8x + 28$
d) $f'(x) = -5x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 10x - 15$
e) $f'(x) = 10x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 4x - 2$
f) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 4x - 3$

4. a) $f'(x) = \frac{-6}{(x-3)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
b) $f'(x) = \frac{8}{(x+4)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
c) $f'(x) = \frac{-2x^2+10x+20}{(5-2x)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$
d) $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+3)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$
e) $f'(x) = \frac{-2x^2-2x-4}{(x^2+4x)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$
f) $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
g) $f'(x) = \frac{-5x^2+6x+1}{(x^2-3x+2)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$
h) $f'(x) = \frac{-x^4+6x^3-12x^2+16x-24}{(x^3+8)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
i) $f'(x) = \frac{x^3+2}{x^3}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5. a) 2 b) $-\frac{5}{7}$

6. a) $y = 3x - 1$ b) $y = -2x$
c) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ d) $y = -\frac{1}{2}$

7. a) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2} - 2x + 1$
b) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}, f'(x) = 14x - 2$
c) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = 4 + \frac{4}{x^2}$
d) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x^2}$

8. a) nie b) tak, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
c) tak, $1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$

9. A

10. C

11. D

12. 1

13. a) $m \leq \frac{21}{4}$ b) $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

14. a) $k \in (2; 5)$ b) $k \in (2; \infty)$
c) $k \in \{2\} \cup (5; \infty)$

15. funkcja $f: (-1, 6)$, funkcja $g: (1, 0)$

16. a) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ b) $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$
c) $f'(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
d) $f'(x) = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

17. a) 90° w punkcie $(1, 1)$
b) 45° w punkcie $(0, 1)$, około 30° w punkcie $(1, \frac{1}{2})$

5.11. Interpretacja fizyczna pochodnej

1. a) 5 m/s b) 13 m/s c) 9 m/s

2. a) 1 m/s b) 3 m/s c) 7 m/s d) 13 m/s

3. a) 3 godziny b) $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
c) $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

4. a) ciało A: 1, ciało B: 5
b) 4 m, $7\frac{2}{3}$ m, $6\frac{1}{4}$ m
c) $v_A(t) = t^2 + 6t + 4;$
 $v_B(t) = 2t^2 + \frac{1}{2}t + 10$ d) $(\frac{3}{2} \text{ s}; 4 \text{ s})$

5. a) s - droga w km, $s(n) = 108000n$
b) 81000 km, czyli drogę około 6,33 razy dłuższą niż średnica Ziemi

6. B

7. D

8. a) $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $36 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 180 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

9. a) $c = 2$ b) $c = 1$

11. a) około 8,8 s b) $9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 19,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 29,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.12. Funkcje rosnące i malejące

3. a) tak b) nie c) tak

4. a) rośnie w $(-\infty; -1)$ i $(2; \infty)$, maleje w $(-1; 2)$

b) rośnie w $(-\infty; -7)$ i $(1; \infty)$, maleje w $(-7; 1)$

c) rośnie w $(2; 6)$,

maleje w $(-\infty; 2)$ i $(6; \infty)$

d) maleje w $\mathbb{R}$

e) rośnie w $(-2; \infty)$, maleje w $(-\infty; -2)$

f) rośnie w $(-\infty; -6)$ i $(-2; 2)$,

maleje w $(-6; -2)$ i $(2; \infty)$

5. a) rośnie w $(-\infty; -5)$ i $(-1; \infty)$,

maleje w $(-5; -1)$

b) rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(2; \infty)$,

maleje w $(0; 1)$ i $(1; 2)$

c) rośnie w $(-\frac{\sqrt{10}}{2}; 0)$ i $(\frac{\sqrt{10}}{2}; \infty)$,

maleje w $(-\infty; -\frac{\sqrt{10}}{2})$ i $(0; \frac{\sqrt{10}}{2})$

6. a) rośnie w $(0; \infty)$, maleje w $(-\infty; 0)$

b) rośnie w $(-1; 1)$,

maleje w $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$

c) rośnie w $(3; 5)$ i $(5; 7)$,

maleje w $(-\infty; 3)$ i $(7; \infty)$

d) rośnie w $(-\infty; -1)$ i $(-1; 0)$,

maleje w $(0; 1)$ i $(1; \infty)$

e) rośnie w $(-4; -2)$ i $(-2; -1)$,

maleje w $(-\infty; -4)$ i $(-1; 2)$ i $(2; \infty)$

f) rośnie w $(-\infty; -3)$ i $(0; \infty)$,

maleje w $(-3; 0)$

7. a) $m \geq \frac{3}{2}$ b) $m \in (-3; 3)$

8. a) $k \leq -\frac{1}{3}$ b) $k \leq 0$

9. D

10. A

11. a) rośnie w $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$,

maleje w $(-1; 0)$ i $(0; 1)$

b) rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $(0; \infty)$

c) rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$

d) rośnie w $(-1; 0)$ i $(1; \infty)$,

maleje w $(-\infty; -1)$ i $(0; 1)$

12. Nie, ten pierwiastek należy do przedziału $(1; 2)$.

13. $D = (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$;

rośnie w $(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3})$ i $(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1)$,
maleje w $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$

14. c) **Wskazówka.** Zauważ, że pochodna funkcji $y = \lg x - x - \frac{1}{3}x^3$ jest równa $y' = \lg^2 x - x^2$, i skorzystaj z podpunktu b).

15. $V(x) = 3\sqrt{3}x^2(2-x)$, $D = (0; 2)$, V rośnie w $(0; \frac{4}{3})$, maleje w $(\frac{4}{3}; 2)$.

5.13. Ekstrema funkcji

1. a) maksimum $f(0) = 0$, minimum $f(2) = -4$
b) minimum $f(2) = 0$, maksimum $f(3) = 1$, minimum $f(4) = 0$
c) minima $f(-2) = 0$, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$
2. a) $f'(x_0) \neq 0$
b) pochodna nie zmienia znaku w punkcie x_0
4. $x_0 = 0$; nie, f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0
5. a) $f_{\max}(-2) = 13$, $f_{\min}(2) = -19$
b) $f_{\min}(-7) = -93$, $f_{\max}(-1) = 15$
c) $f_{\max}(-5) = 49\frac{5}{8}$, $f_{\min}(2) = -7\frac{1}{3}$
d) $f_{\max}(-1) = 16$, $f_{\min}(3) = -16$
e) $f_{\min}(4) = -284$
f) $f_{\max}(-3) = 163$, $f_{\min}(3) = -161$
6. a) $f_{\min}(-2) = -\frac{3}{4}$, $f_{\max}(2) = \frac{3}{4}$
b) $f_{\min}(0) = -5$
c) $f_{\max}(4 - \sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6}$, $f_{\min}(4 + \sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6}$
d) brak ekstremów lokalnych
e) $f_{\max}(0) = 0$
f) $f_{\max}(-3) = -\frac{9}{2}$, $f_{\min}(3) = \frac{9}{2}$
8. a) $m = 8$; tak, minimum
b) $m = -\frac{5}{2}$; tak, maksimum
9. C
10. C
11. A
12. $f_{\min}(-3) = f_{\min}(-1) = f_{\min}(1) = f_{\min}(3) = 0$, $f_{\max}(-2) = f_{\max}(2) = 1$, $f_{\max}(0) = 3$

13. a) dla $k \leq 0$ lub $k \geq 2$
b) dla $k \leq -3$ lub $k \geq 3$
14. brak ekstremów lokalnych; rośnie w $(-\infty; -2)$ i $(-2; 2)$ i $(2; \infty)$
15. $a = 5$, $b = 4$; maksimum; nie, $f_{\min}(7) = 9$
16. a) dla $k \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$ jedno minimum lokalne i jedno maksimum lokalne; dla $k \in (0; \frac{3}{4})$ brak ekstremów lokalnych
b) dla $k \leq 0$ jedno minimum lokalne; dla $k > 0$ dwa minima lokalne i jedno maksimum lokalne
17. 4

5.14. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

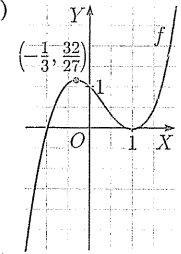
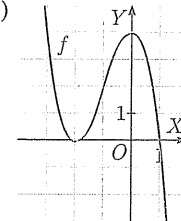
1. a) $m = -2$, $M = 2$ b) $m = 0$, $M = 6$
c) $m = -4$, $M = 2$
2. a) $m = -2$, $M = 6$ b) $m = 2$, $M = 6$
c) $m = -8$, $M = 1$ d) $m = -2$, $M = 2$
3. a) $m = 0$, $M = 7$ b) $m = -20$, $M = 2$
c) $m = -25$, $M = 7$
4. a) $m = -72$, $M = 28$
b) $m = 2$, $M = 11$ c) $m = \frac{1}{2}$, $M = 1$
d) $m = -\frac{1}{8}$, $M = 0$
5. a) $f(D) = \langle 4; 20 \rangle$ b) $f(D) = \langle -11; 32 \rangle$
c) $f(D) = \langle \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \rangle$ d) $f(D) = \langle 12; 16 \rangle$
6. $p = 7$
7. g nie jest funkcją ciągłą, f nie jest określona na przedziale domkniętym
8. A
9. C
10. C
11. $a = \sqrt{11}$
12. $m = -\frac{3}{4}$, $M = \frac{3}{4}$
13. a) $m = 0$, $M = 50$
b) $m = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $M = 6$
14. a) $\frac{1}{2}$ b) ∞
15. a) $f(D) = \langle -4; \frac{11}{4} \rangle$ b) $f(D) = \langle -\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \rangle$

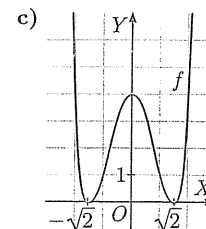
16. $D = (-2; 2)$, $p \in \langle 0; \frac{4}{5} \rangle$

5.15. Zagadnienia optymalizacyjne

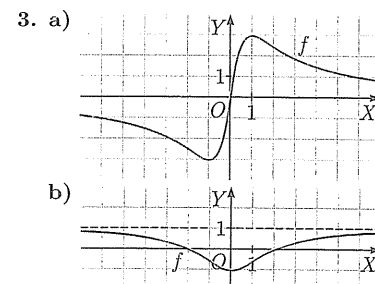
1. a) $P(x) = 2x(60 - x)$, $D = (0; 60)$
b) $P_{\max}(30) = 1800 \text{ (m}^2\text{)}$
2. $3,5 + 4,5 + 4$
3. $(2\sqrt{2} - 1) \text{ m}$
4. $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$
5. a) $V(x) = \pi x^2(30 - x)$, $D = (0 \text{ cm}; 30 \text{ cm})$
b) $x = 20 \text{ cm}$
6. a) $4 + 4$ b) $4 + 4$
7. $r = 2\sqrt{6}$, $h = 2\sqrt{3}$
8. $2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}$
9. 47 mm
10. A
11. D
12. $\frac{1}{2}r^2$
13. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$
14. dla $a \leq \frac{1}{2}$: $(0, 0)$, dla $a > \frac{1}{2}$:
 $(-\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2})$, $(\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2})$
15. $\frac{25\sqrt{6}}{16}$

5.16. Szkicowanie wykresu funkcji

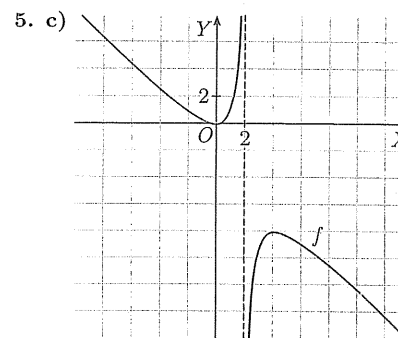
1. a) 
- b) 



2. a) $a \in (-4; 0)$ b) $a = 0$
c) $a = -5$ lub $a = 0$



4. a) $f(D) = \langle 0; \frac{4}{3} \rangle$
b) $f(D) = \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
c) $f(D) = \langle 0; \frac{3}{2} \rangle$



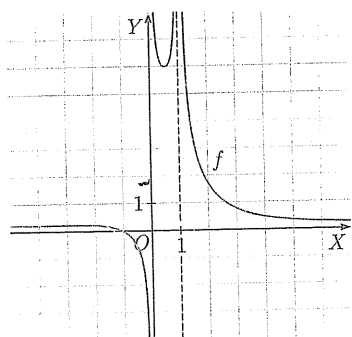
6. a) zero dla $m \in (-8; 0)$, jedno dla $m \in \{-8, 0\}$, dwa dla $m \in (-\infty; -8) \cup (0; \infty)$
b) zero dla $m \in (0; 1)$, jedno dla $m = 0$, dwa dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
c) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (\frac{12}{7}; \infty)$, jedno dla $m = \frac{12}{7}$, dwa dla $m \in (0; \frac{12}{7})$

7. D

8. B

9. D

10.

11. $\frac{1}{7}$

12. zero dla $m \in (-\infty; 0)$, dwa dla $m \in (20; \infty)$, trzy dla $m \in \{0, 20\}$, cztery dla $m \in (7; 20)$, pięć dla $m = 7$, sześć dla $m \in (0; 7)$

13. a) $D = (0; 4\sqrt{3})$ b) $f(D) = (0; 128\pi)$
c) tak

Zestawy powtórzeniowe

1. a) 16 b) 15 c) $\frac{1}{6}$ d) -1 e) $-\frac{1}{8}$
f) $2\sqrt{5}$ g) $-\infty$ h) ∞ i) $-\infty$ j) -1
k) 0 l) 0

2. Wszystkie asymptoty obustronne.

a) $y = 2, x = 9$ b) $y = 1, x = -2$
c) $y = 1, x = -5, x = 1$

3. a) 2, 3 b) 1

4. a) $f'(x) = 2x + 4$ b) $f'(x) = 3x^2$
c) $f'(x) = 14x - 8x^3$
d) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 - 8$
e) $f'(x) = -15x^4 + 12x^3 + 2x - 1$
f) $f'(x) = 75x^4 - 120x^3 + 12x - 12$
g) $f'(x) = \frac{5x^2 + 2x - 4}{(5x + 1)^2}$
h) $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x + 12}{(x^2 + 4)^2}$
i) $f'(x) = \frac{-6x^2 + 12x + 6}{(x^2 - 3x + 4)^2}$

5. a) $y = -3x$ b) $y = x + 2$ c) $y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$

6. a) $D = \mathbb{R}$; rosnąca w $(-\infty; 2)$ i $\langle 3; \infty)$,

malejąca w $\langle 2; 3)$; $f_{\max}(2) = -13$,

$f_{\min}(3) = -14$

b) $D = \mathbb{R}$; rosnąca w $\langle \frac{8}{3}; 6)$,

malejąca w $(-\infty; \frac{8}{3})$ i $\langle 6; \infty)$;

$f_{\max}(6) = 14, f_{\min}(\frac{8}{3}) = -\frac{122}{27}$

c) $D = \mathbb{R}$; rosnąca w $\langle -2; 0)$,

malejąca w $(-\infty; -2)$ i $\langle 0; \infty)$;

$f_{\max}(0) = \frac{2}{3}, f_{\min}(-2) = -2$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; rosnąca w $\langle -1; 0)$

i $(0; \infty)$, malejąca w $(-\infty; -2)$ i $\langle -2; -1)$;

$f_{\min}(-1) = 4$

7. a) $m = -20, M = 7$

b) $m = -21, M = 28$

c) $m = -\frac{1}{2}, M = 0$

d) $m = -\frac{2}{3}, M = -\frac{1}{4}$

8. a) $\frac{1}{11}$ b) 2 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{1}{36}$ e) 1 f) ∞

9. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

10. Wszystkie asymptoty pionowe

obustronne.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $y = -1$ w $-\infty, y = 1$ w $\infty, x = -5$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$; $y = -3$ w $-\infty, y = 3$ w $\infty, x = -1, x = 2$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $y = 1$ w $\pm\infty, x = -1, x = 1$

11. a) $a = -\frac{3}{2}, b = 3$

b) $a \in \left\{ \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{2+\sqrt{2}}{4} \right\}, b \in \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}$

12. a) $m \in \mathbb{R}$ b) $m \geq -4$ c) $m \geq 6$

13. $t \in (-1; 3)$

14. $a = -2$

15. $6\sqrt{5}$

16. $2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$

17. $m \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty)$

18. a) 0 b) $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ c) ∞ d) 0 e) ∞ f) ∞

19. $\frac{1}{2}$

20. $x_0 \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$

21. $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

22. a) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{3}{x^4}, x \neq 0$

b) $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x \neq 0$

23. a) rosnąca w $(-\infty; -3)$ i $\langle -3; 0)$,

malejąca w $(3; \infty)$

b) rosnąca w $(-\infty; -2)$ i $\langle 0; 2)$, malejąca

w $(-2; 0)$ i $(2; \infty)$

c) rosnąca w $\langle -8; -4)$, $\langle -4; 0)$ i $\langle 8; \infty)$,

malejąca w $(-\infty; -8)$, $\langle 0; 4)$ i $\langle 4; 8)$

24. $m \in \{1, 2, 3, 10\}$

25. jedno dla $k > 0$, dwa dla $k = 0$, trzy dla $k < 0$

6.1. Długość okręgu i pole koła

1. a) π b) $\frac{16\pi}{9}$ c) $8,6\pi$

2. a) $\frac{4}{3}\pi$ b) 2π c) $11,2\pi$ d) $2,2\pi$

3. $1,5\pi, 4,5\pi, 6\pi$

4. promień: 9, pole: 18π

5. $\frac{4}{3}\pi$

6. $\alpha = 120^\circ$

7. promień: 1 cm, dl. łuku: 4 cm lub
promień: 2 cm, dl. łuku: 2 cm

8. a) $\frac{4}{3}\pi, \frac{20}{3}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

9. C

10. C

11. A

12. $\frac{7\pi+3}{5\pi-3}$ lub $\frac{5\pi-3}{7\pi+3}$

13. a) $4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$ b) $\frac{8\pi}{3}$ c) $4\pi + 8$

14. a) $r = \frac{R}{3}$ b) $\frac{\pi R^2}{4}$

15. a) $\frac{18(7-2\sqrt{3})}{37\pi}$ b) $\frac{6(2-\sqrt{3})}{\pi}$

16. $\frac{\pi}{2}$

6.2. Kąty w okręgu

1. a) $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 60^\circ$

b) $\alpha = 55^\circ, \beta = 35^\circ, \gamma = 95^\circ$

c) $\alpha = 80^\circ, \beta = 160^\circ, \gamma = 100^\circ$

2. a) 17% b) 61%

3. $\sphericalangle A = 60^\circ, \sphericalangle B = 100^\circ, \sphericalangle C = 80^\circ$,
 $\sphericalangle D = 120^\circ$

4. a) $\alpha = 20^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 20^\circ$

b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 80^\circ$

c) $\alpha = 50^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 30^\circ$

5. $8,4\pi$

6. $(12,5\pi - 20) \text{ cm}^2$

7. a) $\sphericalangle A = 55^\circ, \sphericalangle B = 55^\circ, \sphericalangle C = 70^\circ$

b) $\sphericalangle A = 25^\circ, \sphericalangle B = 40^\circ, \sphericalangle C = 115^\circ$

c) $\sphericalangle A = 28^\circ, \sphericalangle B = 96^\circ, \sphericalangle C = 56^\circ$

8. $\sphericalangle A = 40^\circ, \sphericalangle B = 40^\circ, \sphericalangle C = 100^\circ$

9. a) $r = 6, P = 24\sqrt{2}$

b) $r = 5, P = 32$

c) $r = 7, P = 12\sqrt{10}$

10. $3\sqrt{2} \text{ cm}, 4\sqrt{2} \text{ cm}$

11. 5, 8

12. $\sphericalangle A = 80^\circ, \sphericalangle B = 75^\circ, \sphericalangle C = 117^\circ 30'$,
 $\sphericalangle D = 140^\circ, \sphericalangle E = 127^\circ 30'$

13. a) pięciokąt: 540° , sześciokąt: 720°

b) pięciokąt: 36° , sześciokąt: 30°

14. 12 boków, 150°

15. a) 75% b) około 85,4%

16. a) $\frac{24\sqrt{3}}{(\pi-3)^2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. B

18. D

19. D

20. B

21. D

6.3. Okrąg opisany na trójkącie

1. a) 4 cm b) 5 cm c) $3\sqrt{2} - 3$

2. a) 7 b) 48

3. a) 5 cm b) $4\frac{1}{6} \text{ cm}$

4. a) $|AB| = 12$

b) $P_{ABC} = 12\sqrt{3}, P_{ABD} = 36\sqrt{3}$

5. a) $\frac{b}{2 \sin \alpha}$ b) $\frac{h}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{h \tan \alpha}{\sin 2\alpha}$

6. A

7. A

8. a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

9. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

10. $P = 4S \sin^3 \alpha \cos \alpha$

12. a) $S = (2, 0)$, $R = 10$

b) $S = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$, $R = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

c) $S = (1, -1)$, $R = 2\sqrt{5}$

d) $S = (-2, 4)$, $R = 3\sqrt{5}$

6.4. Okrąg wpisany w trójkąt

1. a) $\frac{8-5\sqrt{2}}{2}$ cm b) $4(\sqrt{3}-1)$ cm

c) $(3\sqrt{5}-5)$ cm

2. $8\pi(2-\sqrt{3})$

3. 24

4. a) $\frac{2\sqrt{10}-2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$

5. podstawa: $12+6\sqrt{3}$, ramię: $6+4\sqrt{3}$

6. a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ b) $2\sqrt{5}-2$

7. a) $\frac{\pi a^2}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{3}$

8. $12+8\sqrt{3}$

9. a) $(2\sqrt{3}-2)$ cm b) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$ cm

10. B

11. D

12. A

13. B

16. 4 cm lub $(2+2\sqrt{5})$ cm

17. $7-4\sqrt{3}$ lub $7+4\sqrt{3}$

6.5. Czworokąty wypukłe

1. a) $h = 8\sqrt{3}$ cm, $P = 128\sqrt{3}$ cm²

b) $h = 3$ cm, $P = 6\sqrt{3}$ cm²

2. 18 cm²

3. a) 5 cm, $3\sqrt{17}$ cm b) $24\sqrt{3}$ cm²

4. 60°, 20 cm

5. a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm²

b) $2\sqrt{5}$ cm, 32 cm²

6. a) $\frac{3(1+\sqrt{3})}{2}d$ b) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{13}+1}{2}d$

7. $\frac{64 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$

8. a) $|AD| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $|BC| = 2\sqrt{7}$ b) 81 : 16

9. 12 cm, 18 cm

10. $26\frac{2}{3}$ cm²

11. D

12. C

13. A

14. $|BD| = 24$ cm, $\sin \angle DAB = \frac{120}{169}$

16. $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$

18. $8\sqrt{3}$

20. Wskazówka. Wykorzystaj kilkakrotnie podobieństwo trójkątów w tej samej skali.

21. 4,8 cm, 3,2 cm

6.6. Okrąg opisany na czworokącie

1. 5 : 8

2. 16π

3. a) 15 cm b) $(9\frac{1}{3} + 4\sqrt{2})$ cm

4. 5,5 cm

5. 9π cm

6. $a = 6\sqrt{3}$, $R = 6$

7. $R = \sqrt{5}$, $x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

8. $2\pi(2-\sqrt{3})$

11. C

12. B

13. B

14. a) przekątne: $r, \sqrt{3}r$; $P = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $\sqrt{6}+2$, około 77°

16. $\sqrt{13}$

17. a) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ cm

b) 1 cm, 3 cm, $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ cm,
 $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ cm

18. Wskazówka. Rozważ trapez o bokach długości: $r, r, r, 2r$.

19. $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{2}$

6.7. Okrąg wpisany w czworokąt

1. a) 2 b) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

2. a) 392 b) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

3. $36\sqrt{2}$

4. a) 32 cm b) 12 cm

5. 3,5

6. 39 cm²

7. a) 54 b) $\frac{18\pi}{5}$

8. 2,5 cm

9. 49,5 - 9π

10. a) 2 cm, 6 cm, 8 cm, 4 cm b) 30 cm²

11. B

12. C

13. B

14. $r = 6,5$ cm, $P = 28$ cm²

15. $2r^2(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta})$

16. $P = 5r^2$, $R = \frac{5\sqrt{41}}{16}r$

17. wysokość: 6 cm,
przekątne: $2\sqrt{10}$ cm, $6\sqrt{10}$ cm

18. $\frac{\pi}{5}$

19. $\frac{P}{2r}$

20. Wskazówka. Poprowadź promień OG do boku BC trapezu i zauważ, że $|EB| \cdot |FC| = |BG| \cdot |GC|$.

21. $\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}$

6.8. Twierdzenie sinusów

1. a) $a = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 75^\circ} \approx 3,6$, $b = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 75^\circ} \approx 2,9$,
 $\gamma = 75^\circ$

b) $a = 12\sqrt{3}$, $b = 12$, $\gamma = 30^\circ$

c) $b = \frac{9 \sin 100^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 25,9$,

$c = \frac{9\sqrt{3}}{2 \sin 20^\circ} \approx 22,8$, $\alpha = 20^\circ$

d) $a = \frac{10 \sin 40^\circ}{\sin 5^\circ} \approx 73,8$, $c = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 5^\circ} \approx 81,1$,
 $\beta = 5^\circ$

2. obwód: około 31,1, pole: około 41,6

3. $20 \cos 40^\circ \sin 20^\circ \approx 5,2$

4. $\gamma = 105^\circ$, $a = 4\sqrt{2}$, $b = 8$, $c = 4(1+\sqrt{3})$

5. a) $c = 4\sqrt{3}$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

b) $c \approx 7,7$, $\alpha \approx 48^\circ$, $\gamma \approx 72^\circ$

c) $a \approx 13,8$, $\alpha \approx 77^\circ$, $\beta \approx 58^\circ$

d) $b \approx 3,6$, $\alpha \approx 25^\circ$, $\beta \approx 15^\circ$

7. a) $c \approx 8$, $\beta \approx 61^\circ$, $\gamma \approx 89^\circ$ lub $c \approx 4,1$,
 $\beta \approx 119^\circ$, $\gamma \approx 31^\circ$

b) $a \approx 9,9$, $\alpha \approx 72^\circ$, $\gamma \approx 73^\circ$ lub $a \approx 6,4$,
 $\alpha \approx 38^\circ$, $\gamma \approx 107^\circ$

8. a) $10 \sin 25^\circ \approx 4,2$, $10 \sin 35^\circ \approx 5,7$,
 $5\sqrt{3}$, 120°

b) $R^2 \sin 50^\circ \sin 100^\circ \approx 0,75R^2$

9. $5\sqrt{2}$ cm

10. około 11,4 m

11. $|AC| = 984,8$ m, $|BC| = 939,7$ m

12. A

13. A

14. C

15. $r \approx 6,1$ cm, $P \approx 17,5$ cm²

16. $|AB| = \sqrt{6}-\sqrt{2}$, $|BC| = 2\sqrt{3}$,
 $|CD| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$, $|AD| = 2$, $P = 2+2\sqrt{3}$

17. $\operatorname{tg} \angle DAB = \frac{\sqrt{3}}{5}$

18. $2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha + 1$ lub $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + 2\sqrt{3} \cos \alpha}$

20. $P = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta))$

6.9. Twierdzenie cosinusów

1. a) $c = 7$ b) $c = \sqrt{13}$ c) $c = 3\sqrt{19}$
d) $c = 2\sqrt{13}$

2. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

c) $\alpha \approx 39^\circ$, $\beta \approx 49^\circ$, $\gamma \approx 92^\circ$

d) $\alpha \approx 49^\circ$, $\beta \approx 22^\circ$, $\gamma \approx 109^\circ$

3. a) $c = \sqrt{6}+3\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$ lub
 $c = 3\sqrt{2}-\sqrt{6}$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 15^\circ$

b) $c = 5\sqrt{2}$, $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 8^\circ$

4. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $a: 6\sqrt{5}$ lub $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,
 $a: 2\sqrt{13}$

5. $\frac{12\sqrt{7}}{7}$, $\frac{24\sqrt{7}}{7}$, 12

6. a) $2\sqrt{7}$ b) $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
 7. a) $3(5 + \sqrt{15})$ b) 15
 8. $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $x = 3\sqrt{6}$
 9. $R = \sqrt{3}$, $|AB| = |AD| = \sqrt{3}$,
 $|CD| = 1 + \sqrt{6}$
 10. $\cos \angle DAB = -\frac{4}{5}$, $|BD| = \frac{9\sqrt{65}}{5}$
 11. 5, $2\sqrt{13}$
 12. C
 13. B
 14. C
 15. $\frac{a}{3}\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$
 16. $-4\sqrt{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{13}$
 17. $2\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$
 18. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$
 19. $\frac{5\sqrt{6}}{6}r$, $\cos \alpha = \frac{29}{35}$
 20. $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$
 21. a) tak b) nie

Zestawy powtórzeniowe

1. $\angle APC = 160^\circ$
 2. $\angle BAD = 110^\circ$, $\angle BCD = 70^\circ$,
 $\angle ADC = 45^\circ$
 3. $15^\circ, 85^\circ, 165^\circ, 95^\circ$
 4. $\angle B = 105^\circ$, $\angle P = 35^\circ$, $\angle C = 40^\circ$
 5. $24 + 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi$
 6. $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 105^\circ$,
 $R = 3\sqrt{2}$
 7. $15\sqrt{15} \text{ cm}^2$
 8. $\frac{91\sqrt{7}}{72}$
 9. $\frac{10}{3}$ lub $\frac{3}{10}$
 11. pole: $\frac{11\pi\sqrt{2}}{3}$, wysokość: $\sqrt[4]{2}$
 12. 48 cm^2
 13. a) 5 cm, 2 cm, 5 cm b) 2 cm
 14. 22 cm^2
 15. 36
 16. a) 48 cm^2 b) 4 cm, 72 cm^2
 17. pole: 32, promień: 5
 18. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle C = 110^\circ$,
 $\angle D = 80^\circ$, kąt między przekątnymi: 90°
 19. 8 cm

20. promień: 8, pole: $\frac{32}{3}\pi$
 21. $15 + 3\sqrt{5}$
 22. a) $\frac{2}{3}p$ b) 3 cm
 23. $r = \sqrt{3} \text{ cm}$, $R = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$
 24. przekątna: $R\sqrt{2}$,
 podstawy: $\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})R$, $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})R$,
 ramię: R
 25. promień: $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, pole: $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$
 26. pole: $32\sqrt{3}$, przekątna: $\frac{4\sqrt{39}}{3}$
 27. $|AD| = |CD| = \sqrt{6}$, promień: $\sqrt{2}$
 28. $\frac{4\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$
 29. $4\sqrt{30}$
 30. $\sin \angle ABC = \frac{7}{25}$, $|AB| = 7,5$, $|AC| = 3,5$

Wskazówka.

a) Korzystając z własności trójkąta OBD , gdzie punkt O jest środkiem okręgu, oblicz sinus i cosinus połowy kąta B , a następnie wykorzystaj wzór na sinus podwojonego kąta.

$$31. \frac{9(3+2\sqrt{2})}{4}$$

Wskazówka. Niech D będzie punktem należącym do boku BC trójkąta prostokątnego ABC takim, że odcinek AD zawiera się w dwusiecznej kąta A . Poprowadź odcinek DE prostopadły do przeciwprostokątnej AB i zauważ, że trójkąty ACD i ADE są przystające, a trójkąty ABC i DEB są podobne.

32. $\sin \angle ACB = 0,6$
 33. $\cos \angle CAP = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos \angle PAB = \frac{5\sqrt{7}}{14}$
 34. $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$,
 $P = 3 + \sqrt{3}$
 35. 4
 40. 4, 5, 6
 43. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$
 44. 2 : 1 lub 1 : 2
 45. $1 - \sqrt{2}$
 46. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
 48. b) $r = a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}$, $R = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$
 49. bok: $\frac{2 \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$,
 pole: $\frac{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2}$